

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PAR ARTICLES PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU DOCTORAT EN GÉNIE
Ph.D.

PAR
DJALLEL EDDINE BISKRI

MÉTHODES DE CALCUL DES FORCES AÉRODYNAMIQUES
POUR LES ÉTUDES DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES

MONTREAL, LE 17 JUILLET 2007

© droits réservés de Djallel Eddine Biskri

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ruxandra Botez, directrice de thèse
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Christian Masson, président du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Eric Granger, membre du jury
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Benoît Boulet, membre du jury
Département de génie électrique à l'Université McGill

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC
LE 6 JUIN 2007
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

MÉTHODES DE CALCUL DES FORCES AÉRODYNAMIQUES POUR LES ÉTUDES DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES

Djallel Eddine Biskri

SOMMAIRE

L'aéroservoélasticité est le résultat de la fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion. L'aéroélasticité, d'une part, traite la nature flexible d'un avion et étudie les phénomènes de couplage entre les forces structurelles et les forces aérodynamiques. La commande du vol, d'autre part, considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction exercée par les lois de commande, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion. Mener une analyse aéroservoélastique sur un avion est un problème complexe mais très important dans la certification des avions, étant donné que les instabilités issues des interactions adverses entre la structure, les forces aérodynamiques et les lois de commande peuvent survenir en tout point de l'enveloppe de vol.

Dans cette thèse, nous avons développé et codé trois nouvelles méthodes d'approximation intitulées Moindres carrés corrigés, État minimal corrigé et États combinés. Ces méthodes d'approximation des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace permettent d'analyser les interactions aéroservoélastiques. Ces approximations corrigées ont été testées et validées sur deux types d'avions différents qui sont le F/A-18 de la NASA Dryden Flight Research Center, et le Challenger CL-604 de Bombardier Aéronautique.

Deux nouvelles méthodes, Corrected Least Square (*CLS*) et Corrected Minimum State (*CMS*) sont basées sur les méthodes classiques connues sous les noms de Moindres carrés *LS* et de l'État minimum *MS*. Dans ces deux méthodes, les erreurs d'approximation entre les forces aérodynamiques approximées par la méthode classique *LS* (ou *MS*) et celles obtenues par la nouvelle méthode *CLS* (ou *CMS*) ont les mêmes formes analytiques que celles des forces aérodynamiques calculées par *LS* ou *MS*. La troisième méthode s'appelle *Mixed State* (ou la méthode des états combinés) et combine les formulations des forces approximées avec les méthodes *LS* et *MS*.

Plusieurs types de résultats ont été analysés: les approximations des forces aérodynamiques, les vitesses et fréquences de battement et les temps d'exécutions calculées par les nouvelles méthodes versus ceux calculés par les méthodes classiques. Suite à la comparaison des résultats obtenus par les nouvelles méthodes avec les résultats obtenus par les méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques, sur les mêmes modèles d'avion, nous avons constaté que les nouvelles méthodes sont plus rapides et précises que les méthodes classiques.

AERODYNAMIC FORCE APPROXIMATION METHODS FOR THE AEROSERVOELASTIC INTERACTIONS STUDIES

Djallel Eddine Biskri

ABSTRACT

Aeroservoelasticity is the result of the fusion between two important theories concerned in different aspects of aircrafts' dynamics. Aeroelasticity, on one hand, treats the flexible nature of an aircraft and studies the couplings phenomena between structural forces and aerodynamic forces. Flight controls, on the other hand, considers the aircraft as a rigid solid in a retroaction configuration exerted by the control laws, and studies the influence of the control system over aircraft's dynamics. Conducting an aeroservoelastic analysis on an aircraft is a complex issue, very important for the aircrafts' certification, given the fact that the instabilities arisen from adverse interactions between the structure, the aerodynamic forces and the control laws could appear in each and every point of the flight's envelope.

In this thesis, we conceived, implemented and validated, on two different aircraft models, three new approximation methods for unsteady aerodynamic forces from frequency domain to Laplace domain, which represent original contributions which allow the analysis of aeroservoelastic interactions. The two different aircraft types are: the F/A-18 from NASA Dryden Flight Research Center, and the Challenger CL-604 from Bombardier Aeronautic.

Two new methods, *CLS* and *CMS*, are based on the classical Least Squares *LS* and Minimum States *MS* methods. In these two methods, the approximation errors between the aerodynamic forces approximated by the classical method *LS* (or *MS*) and those obtained with the new methods *CLS* or *CMS* have the same analytical forms as the approximated forces with the *LS* or *MS* method. The third method is called *Mixed State* (or the *Mixed States method*) and combines the formulations of forces approximated with the *LS* and *MS* methods.

Different types of results were analyzed: aerodynamic forces approximations flutter speeds and frequencies, and execution times calculated with the new methods with respect to the classical methods. Based on results obtained with the new methods versus the results obtained with the classical methods on the same aircraft models, we found that the new methods are faster and more precise than the classical methods.

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont soutenues et encouragées pour faire de ce projet un succès.

Je tiens à remercier ma directrice de recherche, Mme Ruxandra Botez, pour son support et son accompagnement tout au long de cette thèse, pour m'avoir toujours très bien conseillé, encouragé et motivé.

Mes remerciements s'adressent aussi aux ingénieurs de la compagnie Bombardier Aéronautique : Mr Nicholas Stathopoulos, Mr Martin Dickinson, Mr Sylvain Thérien, Mr Alexandre Rathé, ainsi qu'à M Marty Brenner des laboratoires NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) pour leurs supports et conseils.

J'exprime aussi toute ma gratitude à mes parents et ma famille d'Algérie (Constantine), de Montréal, de Trois Rivières et de France pour leurs appuis et encouragements.

Je dédie ce travail à tous les membres de ma famille, spécialement à mes deux parents, mon épouse, mon frère, mes deux soeurs et à mes deux enfants 'Meryem' et 'Abderrahmane'.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	viii
LISTE DES FIGURES.....	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Mise en contexte	1
1.2 Problématique abordée.....	1
1.3 Objectifs et méthodologie	2
1.4 Travaux accomplis	4
1.5 Structure du mémoire.....	5
CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES	7
2.1 Introduction à la revue de la littérature	7
CHAPITRE 3 INSTABILITÉ DYNAMIQUE ET MÉTHODES D'ANALYSE DE BATTEMENT	13
3.1 Introduction	13
3.2 Définition de l'instabilité dynamique aéroélastique	17
3.3 Équations de base pour la détermination de l'instabilité dynamique.....	22
3.4 Présentation de l'algorithme standard pk	24
3.5 Tri des valeurs propres	28

CHAPITRE 4 LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ET D'ÉTAT

	MINIMAL (LS ET MS).....	32
4.1	Introduction.....	32
4.2	Méthode LS.....	32
4.2.1	La méthode standard des moindres carrés (<i>LS</i>).....	32
4.2.2	La méthode standard des moindres carrés (<i>LS</i>) optimisée.....	36
4.2.3	Résultats d'optimisation des termes de retards.....	38
4.2.3.1	Résultats pour les modes symétriques.....	38
4.2.3.2	Résultats pour les modes anti-symétriques.....	39
4.2.4	Conclusions.....	41
4.3	Méthode MS.....	41
4.3.1	La méthode standard <i>MS</i>	41

CHAPITRE 5 MÉTHODES CORRIGÉES44

5.1	Introduction.....	44
5.2	Présentation de la méthode <i>CLS</i>	44
5.3	L'introduction des forces aérodynamiques dans le système.....	52
5.4	Présentation de la méthode <i>CMS</i>	56
5.5	L'introduction des forces aérodynamiques dans le système.....	59
5.6	Présentation de la méthode <i>MxState</i>	60
5.7	Remarques.....	67

CHAPITRE 6 DESCRIPTION DES MODÈLES D'AVIONS70

6.1	Introduction.....	70
6.2	Présentation générale du modèle d'avion F/A-18.....	70
6.3	Modèle analytique de l'avion F/A-18.....	71
6.4	Présentation générale du modèle d'avion Challenger 604 (CL-604).....	72
6.5	Modèle analytique de l'avion CL-604.....	74

CHAPITRE 7	RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	75
7.1	Résultats obtenus par la méthode <i>CLS</i> appliqué sur l'avion CL-604	75
7.1.1	Présentation des approximations des forces aérodynamiques	75
7.1.2	Présentation des taux de réductions des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> versus la méthode <i>CLS</i>	77
7.1.3	Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement	77
7.1.4	Présentation des temps de calcul.....	79
7.1.5	Discussion des résultats obtenus par la méthode <i>CLS</i> pour l'avion CL-604.....	81
7.2	Résultats obtenus par les méthodes <i>MS</i> , <i>CMS</i> et <i>pk</i> appliquées sur les avions F/A-18.....	82
7.2.1	Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement	82
7.2.2	Discussion des résultats obtenus par la méthode <i>CMS</i> pour l'avion F/A-18.....	93
7.3	Résultats obtenus par la méthode <i>MxState</i> appliquée sur le CL-604	95
7.3.1	Présentation des approximations des forces aérodynamiques	95
7.3.2	Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement	98
7.3.3	Discussion des résultats obtenus par la méthode <i>MxState</i> pour le CL-604	100
CONCLUSIONS.....		102
ANNEXE 1	CORRECTED LEAST SQUARES METHOD FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES	105
ANNEXE 2	AERODYNAMIC FORCES BASED ON AN ERROR ANALYTICAL FORMULATION FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES ON A F/A-18 AIRCRAFT	113

ANNEXE 3	NEW MIXED METHOD FOR UNSTEADY AERODYNAMIC FORCE APPROXIMATIONS FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES	133
BIBLIOGRAPHIE		145

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Modes et fréquences de battement de l'avion F/A-1871
Tableau II	Fréquences réduites correspondantes aux modes de battement du modèle de l'avion CL-60474
Tableau III	Taux de réduction des forces aérodynamiques (<i>CLS</i> vs <i>LS</i>) calculés pour 1 à 6 termes de retard (44 modes symétriques et 50 modes anti- symétriques).....77
Tableau IV	Résultats de battement obtenus avec les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport aux résultats de battement standard pour les 44 modes symétriques de l'avion78
Tableau V	Résultats de battement obtenus avec les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport aux résultats de battement standard pour les 50 modes anti- symétriques de l'avion78
Tableau VI	Erreurs numériques relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....83
Tableau VII	Erreurs numériques relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....84

Tableau VIII	Erreurs numériques relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	86
Tableau IX	Erreurs numériques relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	87
Tableau X	Erreurs numériques relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	89
Tableau XI	Erreurs numériques relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour le nombre de Mach= 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	90
Tableau XII	Erreurs numériques relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i>	

	standard pour le nombre de Mach= 1.3 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	92
Tableau XIII	Nombre optimal de termes de retard correspondant aux premières vitesses équivalentes et fréquences les plus proches calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> dans 4 cas : $M = 1.1$ et $M = 1.3$ pour les modes symétriques et anti-symétriques d'un avion F/A-18.....	94
Tableau XIV	Nombre optimal de termes de retard correspondant aux deuxièmes vitesses équivalentes et fréquences les plus proches calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> dans 4 cas : $M = 1.1$ et $M = 1.3$ pour les modes symétriques et anti-symétriques d'un avion F/A-18.....	94

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Interactions entre les différents domaines de l'aéroservoélasticité.....14
Figure 2	Processus d'analyse englobant les différentes catégories de codes16
Figure 3	Modèle simplifié de l'instabilité dynamique.....18
Figure 4	Exemple de calcul du battement (amortissement vs le nombre de Mach).....24
Figure 5	Algorithme de la méthode standard pk26
Figure 6	Version modifiée de la méthode pk de battement27
Figure 7	Modes non triés calculés par la méthode pk de battement.....29
Figure 8	Méthode de tri utilisée dans l'algorithme pk de battement30
Figure 9	Modes triés calculés par la méthode pk de battement.....31
Figure 10	Nouvelle version de l'algorithme LS37
Figure 11	Correspondance entre les éléments des lignes de la matrice E et les éléments des premières lignes des matrices A3 et A467
Figure 12	Le F/A-18 de la NASA (Vue du haut)70
Figure 13	Essais au sol sur l'avion F/A-1872
Figure 14	L'avion CL-604 de Bombardier Aéronautique (vue de face)73
Figure 15	Éléments des parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques $Q(35,15)$ et $Q(38,25)$ versus 8 fréquences réduites k pour 1 et 4 termes de retard76
Figure 16	Le temps d'exécution (en secondes) des méthodes LS et CLS pour 44 modes symétriques de l'avion CL-604 et pour 1 à 6 termes de retard.....80
Figure 17	Le temps d'exécution (en secondes) des méthodes LS et CLS pour 50 modes anti-symétriques de l'avion CL-604 et pour 1 à 6 termes de retard.....80

Figure 18	Le temps d'exécution (en secondes) pour l'estimation de l'erreur des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> versus <i>LS</i> pour les modes symétriques et antisymétriques de l'avion CL-604.....	81
Figure 19	Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	85
Figure 20	Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	85
Figure 21	Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	88
Figure 22	Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	88
Figure 23	Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	91

Figure 24	Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.....	91
Figure 25	Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes <i>MS</i> et <i>CMS</i> pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode <i>pk</i> standard, pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18	93
Figure 26	Quatre éléments des forces aérodynamiques versus la fréquence réduite <i>k</i> approximées en utilisant la méthode <i>MxState</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées en NASTRAN.....	97
Figure 27	Erreur de la vitesse de battement (noeuds) calculées par la méthode <i>LS</i> avec 8 termes de retard et avec la méthode <i>MxState</i> en utilisant 1 à 4 termes de retard pour 44 modes symétriques	98
Figure 28	Erreur de la vitesse de battement (noeuds) calculées par la méthode <i>LS</i> avec 8 termes de retard et avec la méthode <i>MxState</i> en utilisant 1 à 4 termes de retard pour 50 modes anti-symétriques.....	99
Figure 29	Erreur de la fréquence de battement (Hz) calculées par la méthode <i>LS</i> avec 8 termes de retard et avec la méthode <i>MxState</i> en utilisant de 1 à 4 termes de retard pour 44 modes symétriques pour l'avion CL-604	99
Figure 30	Erreur de la fréquence de battement (Hz) calculées par la méthode <i>LS</i> avec 8 termes de retard et avec la méthode <i>MxState</i> en utilisant de 1 à 4 termes de retard pour 50 modes anti-symétriques pour l'avion CL-604	100

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

α	Déplacement angulaire d'une aile
$A_{0,1,2}^{MS}$	Matrices estimées par la méthode <i>MS</i>
$A_{0,1,2}^{Err}$	Matrices d'erreurs utilisées par la méthode <i>CMS</i>
C_L	Coefficient de portance
CLS	Corrected Least Square
CMS	Corrected Minimum State
D^{MS}	Matrice estimée par la méthode <i>MS</i>
D^{Err}	Matrice d'erreur
DLM	Doublet Lattice Method
E^{MS}	Matrice estimée par la méthode <i>MS</i>
E^{Err}	Matrice d'erreur
E^*	Terme d'erreur dans la matrice E^{Err}
$Err(s)$	Matrice d'erreur estimée dans le domaine de Laplace
h	Déplacement vertical de l'aile
I_α	Moment d'inertie
ISAC	Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls
J	Critère d'optimisation quadratique
$K_{\alpha,h}$	Constantes d'élasticité d'une aile
k	Fréquence réduite
k_i	Fréquences réduites
L	Portance générée par la surface d'une aile
LCO	Limit Cycle Oscillation
LS	Méthode des moindres carrées (Least Squares)
<i>M</i>	Nombre de Mach
M	Moment autour de l'axe elastique d'une aile
MP	Méthode des Matrices Padé (Matrix Padé)

MS	Méthode des états minimums (Minimum States)
n_{Lags}	Nombre total de termes de retard
P	Pression dynamique
q_{dyn}	Pression dynamique
$Q(k)$	Forces aérodynamiques dans le domaine fréquentiel
$Q_{ij}(k)$	Élément (i,j) de la matrice des forces aérodynamiques
$Q(s)$	Forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace
$\hat{Q}_{MS}(s)$	Forces aérodynamiques estimées par la méthode MS
ρ	Masse volumique
R^{MS}	Matrice carrée et diagonale de dimensions $(n_{Lags} * n_{Lags})$
R^{Err}	Matrice d'erreur carrée et diagonale de dimensions $(n_{Lags} * n_{Lags})$
S	Surface d'une aile
STARS	STructural Analysis Routines
V	Vitesse vraie
$\omega_{\alpha}, \omega_h$	Fréquences naturelles d'une aile

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Mise en contexte

L'aéroservoélasticité est une théorie multidisciplinaire consistant dans une combinaison de la théorie de l'aéroélasticité avec la théorie de servo-commande. L'aéroélasticité étudie les interactions de type fluides-structures entre les forces aérodynamiques et la structure élastique de l'avion modélisée par des éléments finis. L'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion rigide est étudiée dans la théorie de la servo-commande. Il faudrait mentionner que dans l'aéroélasticité, l'avion flexible est considéré d'avoir un nombre très grand de degrés de liberté pendant que dans la servo-commande, l'avion est considéré rigide avec six degrés de liberté.

L'étude des interactions aéroservoélastiques est nécessaire à la certification des avions à commande électriques et équipés des systèmes actifs de commande pour la suppression du battement, des allègements aux charges dues aux manœuvres ou aux rafales. Le but de ces études est d'analyser les interactions entre la structure flexible de l'avion modélisé par des éléments finis et les combinaisons optimales des systèmes de commande du battement, aux rafales et aux manœuvres.

1.2 Problématique abordée

La conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence (aéroélasticité) au domaine de Laplace (aéroservoélasticité) est un des aspects les plus importants de l'aéroservoélasticité. Les forces aérodynamiques sont calculées sur un avion flexible modélisé par des éléments finis dans le domaine de fréquence pour plusieurs fréquences réduites (k) et nombres de Mach (M) par la méthode des doublets en régime subsonique et par la méthode des pressions constantes en régime supersonique. Les méthodes

classiques pour la conversion de ces forces du domaine de fréquence au domaine de Laplace sont les méthodes Least Squares *LS* (Moindres carrés) et Minimum State *MS* (État minimum).

Les vitesses et les fréquences de battement sont calculées par la méthode standard *pk* de battement dans le domaine de Laplace en considérant les forces aérodynamiques approximées par les méthodes *LS* et *MS* dans l'équation de mouvement de l'avion, et sont ensuite comparées aux vitesses et fréquences de battement dans le domaine de fréquence. L'une des caractéristiques de méthode standard *pk* est que cette dernière considère les forces aérodynamiques ayant une forme complexe (une partie réelle et une partie imaginaire).

Pour cette raison, la qualité des approximations des forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace influence la précision des vitesses et des fréquences de battement, donc de l'enveloppe de vol. Il existe une relation entre la qualité des approximations de ces forces et le degré du polynôme approximant ces forces aérodynamiques par une de ces deux méthodes classiques *LS* ou *MS*. Le degré du polynôme est dépendant du temps d'exécution, toutefois la qualité des approximations des forces aérodynamiques est meilleure lorsque le temps d'exécution est grand. Les vitesses et les fréquences de battement sont calculées à partir des valeurs propres de la matrice du système modélisant l'avion. En effet le phénomène de battement apparaît lorsque la valeur de partie réelle d'une valeur propre (amortissement) devient positive. Notons qu'un tri des valeurs propres selon les modes vibratoires est nécessaire.

1.3 Objectifs et méthodologie

Dans le but d'étudier l'aéroservoélasticité, il faut faire interagir les deux types d'aérodynamique étudiés dans les deux disciplines. Un des aspects principaux de cette interaction est la conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans

le domaine de Laplace. Comme on le verra plus tard, cette conversion est réalisée par plusieurs méthodes d'approximation.

Dans cette thèse, nous avons étudié un aspect important de l'aéroservoélasticité, surtout les méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans le domaine de Laplace. En effet, les méthodes d'approximation doivent respecter deux critères qui s'opposent : une très bonne (fidèle) approximation (qui s'obtient en augmentant le nombre de termes de retards) et un système linéaire invariant dans le temps de dimension réduite (le nombre de retards le plus petit possible).

Les méthodes d'approximation les plus connues dans la littérature sont la méthode des moindres carrés (*LS*) et la méthode de l'état minimum (*MS*). Nous présentons dans cette thèse deux nouvelles méthodes basées sur les méthodes *LS* et *MS*, dans lesquelles, en utilisant un critère d'optimisation quadratique qu'on identifiera par J , nous minimisons les erreurs entre les résultats obtenus avec les méthodes *LS* et *MS* et les forces initiales dans le domaine de fréquence. Ces erreurs sont écrites sous des formes analytiques similaires aux formes analytiques des forces obtenues par les approximations *LS* et *MS* et les nouvelles méthodes s'appellent *CLS* (en anglais : *Corrected LS*) et *CMS* (en anglais : *Corrected MS*). Une troisième nouvelle méthode a été conçue. Celle-ci combine les deux formulations de la méthode *LS* et de la méthode *MS*, et cette nouvelle méthode s'appelle la méthode des états combinés (*MxState*).

Parmi les logiciels qui peuvent calculer les forces aérodynamiques, le logiciel STARS a été choisi pour nos études pour les interactions aéroservoélastiques sur l'avion F/A-18 SRA (System Research Vehicle) car le modèle d'avion et le logiciel sont encore utilisés dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research. Dans le but d'étudier les interactions aéroservoélastiques sur l'avion CL-604, le logiciel NASTRAN disponible chez Bombardier Aéronautique a été utilisé. Le choix de ces deux logiciels a été fait sur la base que se sont deux outils très puissants et en même temps disponibles.

Les structures des avions F/A-18 et CL-604 ont été modélisées à l'aide des théories d'éléments finis en STARS et NASTRAN dans les laboratoires de la NASA Dryden Research et chez Bombardier Aéronautique, respectivement.

La structure de l'avion a été modélisée par des poutres et les équations de mouvement de l'avion ont été dérivées en fonction des déplacements de chaque point de la structure de l'avion. De cette manière, la masse, l'amortissement et la rigidité de l'avion ont été calculés dans chaque point de la structure de l'avion. Les modes de vibrations et leurs fréquences spécifiques pour les composantes de l'avion ont été déterminés.

Les forces aérodynamiques ont été calculées par la méthode des doublets (Doublet Lattice Method DLM) en régime subsonique et par la méthode des pressions constantes (Constant Pressure Method CPM) en régime supersonique, sur les avions F/A-18 et CL-604 dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research et Bombardier Aéronautique pour plusieurs fréquences réduites et nombres de Mach.

Pour l'application des méthodes DLM ou CPM, les surfaces ont été divisées dans des panneaux trapézoïdaux parallèles aux vitesses de l'air. La distribution des pressions induites a été calculée, d'où les coefficients aérodynamiques d'influence et les forces aérodynamiques ont été calculés. Une fois que ces forces aérodynamiques ont été calculées, nous estimons les valeurs des vitesses et des fréquences de battement pour lesquelles l'avion F/A-18 et CL-604 deviennent instables. Les enveloppes de vol (le nombre de Mach versus l'altitude) pour les avions F/A-18 et CL-604 étant déjà définies, ces avions devraient rester à l'intérieur de leurs enveloppes de vol.

1.4 Travaux accomplis

Nous avons comparé les résultats obtenus par les méthodes *LS* et *MS* avec les résultats obtenus par les nouvelles méthodes *CLS* et *CMS*. Le premier ensemble de résultats sont représentés sous forme d'approximations des forces aérodynamiques du domaine de

fréquence dans le domaine de Laplace. Le deuxième ensemble de résultats sont représentés sous forme des vitesses et fréquences de battement pour lesquelles l'avion devient instable. Les nouvelles méthodes *CLS* et *MxState* ont été appliquées sur l'avion CL-604 et la méthode *CMS* a été appliquée sur l'avion F/A-18. Les laboratoires des Centres de Recherche de la NASA Dryden Flight ont fourni les données de l'avion F/A-18 et la compagnie Bombardier Aéronautique a fourni les données de l'avion CL-604. Des meilleurs résultats ont été obtenus avec les nouvelles méthodes *CMS*, *CLS* et *MxState* par rapport aux résultats obtenus par les méthodes *MS* et *LS*.

Plusieurs articles qui traitent du sujet ont été soit soumis, acceptés ou publiés. Plusieurs réponses aux problèmes ont été apportées. La modélisation des erreurs et l'ajout de ces erreurs aux modèles des forces aérodynamiques ont été effectués. Nous avons également modifié l'algorithme standard des moindres carrés en introduisant une partie d'optimisation de ses termes de retard. Nous avons également effectué l'intégration du modèle des forces aérodynamiques dans le système. Aussi, nous avons proposé une version améliorée de l'algorithme de la méthode standard *pk*. Cette nouvelle version de l'algorithme résout le problème de convergence des fréquences réduites. Nous avons prédit les valeurs de vitesses pour lesquelles les modes de battement peuvent apparaître. Enfin, la validation du modèle des forces, de l'algorithme modifié de la méthode *pk* et du tri des valeurs propres du système sur deux modèles d'avions a été accomplie.

1.5 Structure du mémoire

La structure du mémoire est définie comme suit : Le chapitre 2 présente une revue bibliographique qui traite du sujet. Le chapitre 3 traite le sujet de l'instabilité dynamique et présente les méthodes d'analyse de battement. Le chapitre 4 montre les deux méthodes classiques (*LS* et *MS*) utilisées le plus souvent dans l'approximation des forces aérodynamiques. Le chapitre 5 décrit les trois nouvelles méthodes d'approximation conçues dans cette thèse. Le chapitre 6 présente les modèles d'avions utilisés pour la

validation des différents concepts. Le chapitre 7 présente les résultats obtenus par nos nouvelles méthodes et par les méthodes classiques sur les trois avions.

Une section réservée aux conclusions suit les résultats. En annexe on peut y trouver les articles relatifs au travail de recherche. À la fin du mémoire, une liste de références utilisée comme support est suggérée comme bibliographie.

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES

2.1 Introduction à la revue de la littérature

Parmi les premières études d'aéroservoélasticité dans le domaine temporel, des lois de commande multi-entrées et multi-sorties (*MIMO*) ont été implantées par Edwards [1] dans la méthode des moindres carrés *LS*. Roger [2] a continué à travailler sur l'approche d'Edwards et a démontré la suppression active du battement pendant des tests en vol.

Karpel [3] a proposé plus tard une approche complètement différente pour résoudre ce type d'approximations. Son but a été d'obtenir un système linéaire invariant dans le domaine de temps. Il a décidé d'intégrer cette information directement dans l'équation représentant les valeurs des forces aérodynamiques non-stationnaires en ajoutant un terme similaire à une fonction de transfert d'un système linéaire. Son approche s'appelle l'état minimum (en anglais : Minimum State *MS*). L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Roger est qu'elle fournit une excellente approximation des forces aérodynamiques avec un nombre très réduit des états augmentés. Plus tard, Buttrill et al. [4] et Mukhopadhyay [5] ont utilisé l'approximation de Roger pour démontrer des résultats dans le domaine de temps pour une aile flexible.

L'amélioration des méthodes *LS* et *MS* a été réalisée par l'imposition des différentes conditions (restrictions) à ces approximations pour leur permettre de passer par certains points. Ces approximations ont été forcées d'être exactes en zéro et dans deux autres points choisis (pour les représentations de la fréquence de battement et de la fréquence aux rafales). Les méthodes améliorées ont été appelées : la méthode *ELS* (Extended Least-Squares) [6, 7] et la méthode *EMMP* (Extended Modified Matrix-Padé) [8].

En utilisant la méthode *MS* et en considérant une dépendance régulière par rapport au nombre de Mach, Poirion [9] a construit une approximation qui a permis de calculer les forces aérodynamiques non stationnaires pour des nombres de Mach compris dans un intervalle précis et pour une plage de fréquences bien déterminée.

Des calculs des forces aérodynamiques par les méthodes de ‘Padé’ et de ‘synthèse modale’ ont été réalisés par Zimmermann [10]. Les avantages et les inconvénients de ces méthodes par rapport aux méthodes classiques de battement ont été analysés. Les influences, dans les résultats de battement, des non-linéarités, comme la zone morte, l’hystérésis et le retard dans le temps, causés par le traitement digital, ont été analysés pour un avion à commande électrique doté d’un système de commande active.

Hoadley et Karpel [11] ont montré dans la méthode d’état minimal (*MS*) que le nombre des états augmentés représentant l’aérodynamique non-stationnaire était en fonction du nombre des racines du dénominateur dans l’approximation *MS*. Des différentes améliorations aux équations de mouvement dans la méthode *MS* ont été apportées (l’optimisation, la pondération dépendante de la fréquence et la sélection des contraintes) pour un modèle d’aile active flexible dans un tunnel à vent.

Stearman, Powers, Schwartz et Yurkovich [12] ont investigué et modélisé les phénomènes aéroélastiques non linéaires sur des avions équipés avec des technologies avancées qui ne pouvaient pas être étudiés par les méthodes classiques d’analyse et modélisation. Ces approches interdisciplinaires se basaient sur des procédures d’identification des systèmes non-linéaires digitaux qui utilisaient des moments spectraux de grand ordre (dans le domaine de la fréquence) et des moments de corrélation de grand ordre (dans le domaine de temps). Il a été possible de détecter la présence des non-linéarités, de quantifier et de modéliser leurs puissances par des fonctions de transfert non-linéaires et des filtres digitaux non-linéaires, et de quantifier le flux d’énergie non-linéaire entre les modes d’un avion moderne.

L'optimisation simultanée des paramètres de structure et de contrôle d'une aile équipée d'un système de contrôle d'allègement des charges dues aux rafales (en anglais : Gust Load Alleviation *GLA*) a été étudiée par Suzuki et Yonezawa. La conception d'un système aéroserveoélastique a été obtenue en utilisant un modèle équipé d'un système de contrôle servant à l'atténuation des charges dues aux rafales dans un tunnel à vent [13].

Pour une analyse aéroserveoélastique générale [14], les équations de mouvement ont été représentées sous la forme d'espace d'état, linéaire, invariant dans le temps. Dans ce but, la matrice des fonctions de transfert des forces aérodynamiques non linéaires a été approximée dans le domaine de Laplace par des fonctions rationnelles (en anglais : Rational Function Approximation *RFA*) pour chaque élément de la matrice. Tewari [15] a étudié la fonction d'approximation rationnelle (*RFA*) à racines multiples et a utilisé la théorie d'optimisation des contraintes pour cette fonction.

Deux nouvelles approximations ont été présentées par Livne [16] pour les systèmes linéaires, invariants dans le temps et faiblement amortis d'ordre élevé représentant la dynamique des avions activement commandés en vol aux grandes vitesses. Fritchman [17] a développé une méthodologie par laquelle le modèle structurel de l'avion à grande échelle était analysé dans le temps à l'aide du logiciel EASY5x.

Luton et Mook [18] ont développé des méthodes pour la prédiction de la réponse aéroserveoélastique d'une aile, en régime non-stationnaire subsonique. Toutes les équations ont été résolues simultanément dans le temps par un schéma itératif, ce qui a permis l'utilisation d'un éventail de modèles non-linéaires structuraux et aérodynamiques ainsi que la modélisation du comportement aéroélastique sous-critique, critique et sur-critique de ces modèles.

Herszberg et Karpel [19] ont considéré un système à réaction de premier ordre dans le domaine du temps. Dans le design optimal des systèmes aéroserveoélastiques, un temps

considérable de calcul a été pris pour calculer les dérivées définissant les changements dus à la sensibilité et à la conception.

Chen [20] a développé une méthode de simulation directe généralisée en utilisant une approche du système sous forme d'espace d'état dans le domaine du temps discret pour la réponse transitoire des systèmes aéroélastiques non linéaires en boucle ouverte et en boucle fermée. Cette méthode a été validée par la corrélation de la réponse transitoire d'une section d'un profil d'aile en trois degrés de liberté avec des résultats numériques et expérimentaux.

Botez et Bigras [21] ont comparé les résultats obtenus par les méthodes d'approximation *LS*, *MP* et *MS* et ont trouvé que la méthode *MS* a donnée de meilleurs résultats par rapport aux résultats obtenus par les méthodes *LS* et *MP*. Cependant, ils ont trouvé que le système était mal conditionné quand le nombre des termes de retard de l'approximation était plus grand que le nombre des fréquences réduites. Afin de résoudre ce problème, les auteurs ont proposé de choisir, à chaque itération, les valeurs optimales entre les résultats obtenus entre deux itérations successives.

Cotoi et Botez [22] ont proposé une nouvelle approche basée sur une approximation de Padé très précise dans laquelle le troisième terme de la formulation *MS* a été remplacé par une fonction de transfert d'un système linéaire d'ordre réduit. Les méthodes de réduction en Matlab suivantes ont été utilisées : la méthode de la réalisation minimale, la méthode de Schur et la méthode de BST-REM (Balance Stochastic Truncation–Relative Error Method). Une comparaison entre les résultats obtenus par cette nouvelle approche et la méthode de *MS* a été présentée. L'erreur de cette nouvelle approche a été 12-40 fois

plus petite que l'erreur de la méthode d'approximation *MS* pour le même nombre d'états augmentés et a été dépendante du choix de la méthode de réduction du modèle.

Luus a conçu la méthode de Luus-Jakola *LJ* [23] pour la réduction du système. Cette approche a utilisé la procédure dynamique itérative connue sous le nom de procédure d'optimisation de Luus-Jakola (*LJ*). La formule d'approximation choisie a influencé énormément l'ordre du modèle d'espace d'état. La dimension du modèle a influencé l'efficacité des analyses ultérieures, donc il a été nécessaire d'obtenir un modèle d'ordre le plus petit possible sans tout de fois dégrader l'exactitude de l'approximation. Botez et al. [24] ont présenté les résultats obtenus par l'approche de Luus sur le modèle de l'*ATM* (Aircraft Test Model). La procédure *LJ* a nécessité un effort de calcul plus petit que pour la réduction de l'ordre du modèle, et elle a été moins prédisposée aux erreurs numériques.

Cotoi et al. [25] ont utilisé des polynômes de Chebyshev dans les méthodes d'approximation des forces aérodynamiques. Un important avantage de ces méthodes, dans le cas d'une boucle ouverte, a été le temps de calcul qui a été réduit de trois fois par rapport à la méthode Padé et de 30 fois par rapport à la méthode Least Squares *LS*. Dans le cas de l'application de la méthode de Chebyshev sur l'*ATM* en boucle fermée, deux termes de retard ont été suffisants pour obtenir une excellente approximation des forces aérodynamiques.

Hiliuta et Botez [26] ont constaté que le fonctionnement de la méthode *LS* dépendait de la sélection de la marge des fréquences choisies pour l'avion F/A-18. Dans le cas où la marge des fréquences a été choisie uniformément, c'est-à-dire les fréquences réduites ont été espacées uniformément, de bons résultats pouvaient être obtenus par la méthode *LS*. La méthode *MS2LS* a été développée et publiée dans les comptes-rendus aux conférences [31] à [34] et publiés dans des journaux [39] et [40].

Dans cette thèse, nous allons présenter deux nouvelles méthodes appelées *CLS* (Corrected Least Squares) et *CMS* (Corrected Minimum State) basées sur les méthodes *LS* et *MS* classiques. Plus précisément, les erreurs entre les forces aérodynamiques

calculées par les nouvelles méthodes et celles calculées par les méthodes *LS* et *MS* seront écrites sous la même forme analytique que les forces aérodynamiques calculées par les méthodes *LS* et *MS*. La troisième méthode est la méthode des États Combinées (en anglais : Mixed State) et dans cette méthode nous présentons une combinaison des formulations de la méthode *LS* avec la méthode *MS*.

L'un des avantages de ces méthodes par rapport aux méthodes classiques est que l'erreur est rajoutée à l'approximation. Nous avons remarqué dans plusieurs cas que les approximations effectuées par les méthodes classiques n'étaient pas assez précises pour un nombre de retard réduit. Pour cette raison, nous avons été obligés d'augmenter cette dernière approximation pour obtenir une meilleure précision, ce qui va se traduire par l'ajout des nouveaux états dans le système ou par l'enlargissement de la matrice du système. Dans le but de résoudre actuellement ce problème, nous utilisons un nombre de retard réduit tout en modélisant l'erreur qui est par la suite rajoutée à l'approximation.

Les résultats obtenus par les méthodes *CLS*, *CMS* et *MxState* ont été publiés dans les comptes rendus aux conférences [27]-[30], soumis pour publication [35] et [38] et acceptés dans les journaux spécialisés [36] et [37]. D'après nos connaissances, ces concepts sont nouveaux. Les résultats, des vitesses, fréquences de battement et de temps d'exécution, obtenus par les nouvelles approches sont meilleurs que ceux obtenus par les méthodes classiques *LS* et *MS*. La modélisation des erreurs et l'ajout de ces erreurs aux modèles des forces aérodynamiques ont été présentés dans plusieurs articles qui sont soit soumis ou déjà publiés. Nous avons également effectué l'intégration du modèle des forces aérodynamiques dans le système. Nous avons prédit les valeurs de vitesses pour lesquelles les modes de battement peuvent apparaître et ce pour deux types d'avions F/18 et Cl-604.

CHAPITRE 3

INSTABILITÉ DYNAMIQUE ET MÉTHODES D'ANALYSE DE BATTEMENT

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté en détails une revue bibliographique qui traite du sujet de l'approximation des forces aérodynamiques ainsi que du domaine de l'aéroservoélasticité. Dans le présent chapitre, nous introduirons la théorie de la aéroservoélasticité en utilisant un modèle d'instabilité dynamique (connu sous le nom de : 'pitch-plunge') qui sera également montré et étudié. La méthode standard de battement connue sous le nom de la méthode ' pk ' sera expliqué et utilisée dans nos travaux pour la prédiction des valeurs de vitesses et de fréquences des battements.

3.1 Introduction

L'aéroservoélasticité est un domaine multidisciplinaire qui s'intéresse aux interactions entre les charges aérodynamiques de nature irrégulières (*aéro*), les déformations de la structure d'un aéronef (*élasticité*) et les systèmes de commande active du vol (Fly by Wire) (*servo*). Ces interactions peuvent causer une dégradation dans la combinaison aéroservoélastique pouvant endommager la structure de l'avion. Une analyse aéroservoélastique est requise afin d'assurer une meilleure stabilité de l'appareil. Cette théorie est considérée comme étant un outil indispensable à la détection des phénomènes instables de battement ainsi qu'aux différentes étapes de conception des avions modernes.

La figure 1 illustre l'interaction des trois disciplines : l'aérodynamique, la dynamique structurelle et la commande. Les phénomènes de battement qui n'incluent aucune interaction avec la dynamique du système de commande sont représentés par le côté gauche du triangle d'interaction (*aéroélasticité*). Le côté horizontal (*aéroservodynamique*) représente la synthèse du système de commande de vol pour un

avion rigide. La *servoélasticité* représente la dynamique de l'avion flexible due aux commandes.

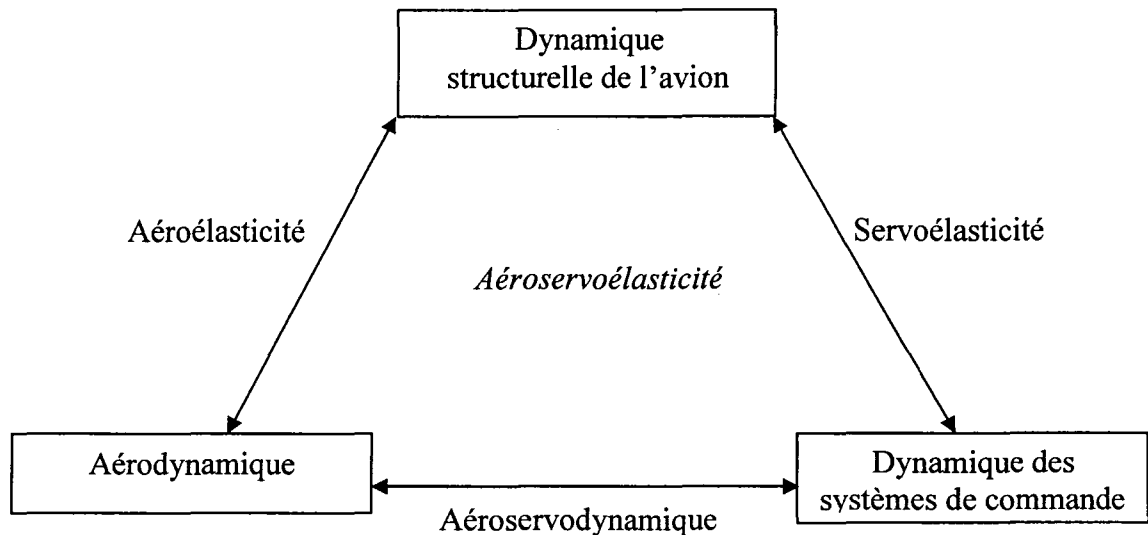


Figure 1 Interactions entre les différents domaines de l'aéroservoélasticité

Généralement, sur un avion à commande électrique, il faudrait toujours concevoir des méthodes de suppression des battements qui vont alléger les différentes charges sur la structure d'un avion et élargir l'enveloppe de vol d'un avion. Le contrôle des vibrations a le but de réduire des déformations élastiques indésirables, tout en adoucissant les effets des charges dues aux rafales. À présent, cette technologie moderne est complexe car sa réalisation dépend de plusieurs paramètres.

Dans le cadre de notre thèse de recherche, nous traitons le sujet de l'aéroservoélasticité en collaboration avec les ingénieurs travaillant dans les compagnies aéronautiques. Cependant, tout le travail effectué ne s'intéresse qu'à une partie de ce domaine. Nous proposons de subdiviser le domaine de l'aéroservoélasticité selon les types de codes informatiques. Ceci dit, nous identifions les trois catégories de codes définies comme suit :

1. La première catégorie englobe tous les codes représentatifs des méthodes d'approximation et de linéarisation de forces aérodynamiques. Les forces aérodynamiques représentent toutes les forces externes s'appliquant sur la structure de l'avion. Vu que ce genre de forces peut être généré par des différents sources et phénomènes (variation de la température, variation de la pression, la présence du vent, ...), nous ne pouvons pas lui attribuer un modèle mathématique général bien défini. En d'autres termes, nous ne pouvons représenter ce genre de forces par une formule mathématique unique. Dans cette thèse nous allons présenter des nouvelles méthodes pour les approximations des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace.
2. La seconde catégorie regroupe tous les codes incluant des méthodes permettant la prédiction des instabilités aérodynamiques telles que les phénomènes de battement sur un avion à commande électrique. Nous citerons à titre d'exemple des méthodes de prédiction du battement connues sous le nom de p et pk .
3. La troisième catégorie regroupe les codes de toutes les méthodes de commande (conception de contrôleurs) permettant soit l'allègement ou la suppression des charges aérodynamiques sur un avion. Parmi ces méthodes de commande des systèmes actifs de commande des avions nous mentionnons : le système d'allègement des charges dues aux rafales (Gust Load Alleviation), le système de suppression du battement (Flutter Suppression System) et le système d'allègement des charges dues aux manœuvres (Maneuver Load Alleviation).

De cette façon, le processus d'analyse se présentera comme suit :

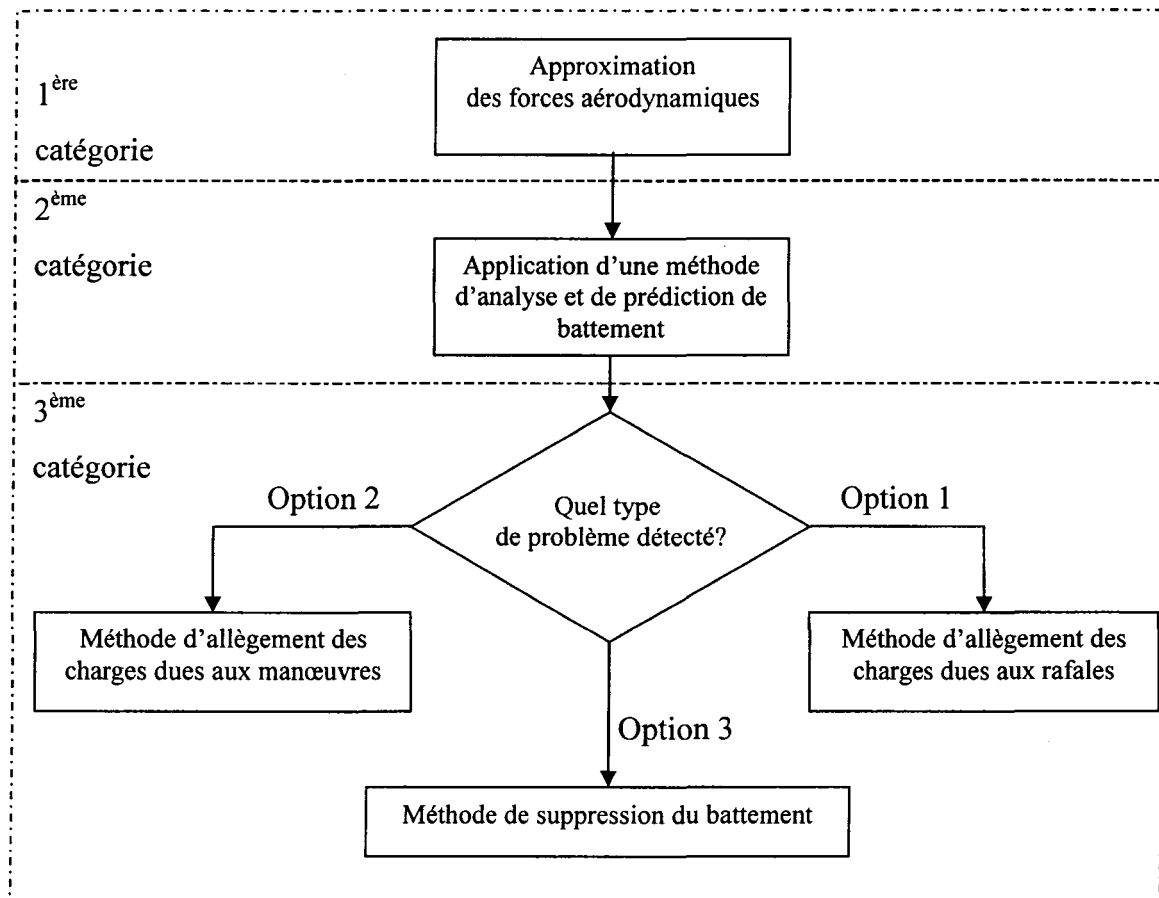


Figure 2 Processus d'analyse englobant les différentes catégories de codes

Vu la complexité du sujet, nous nous limiterons dans cette thèse aux deux premières catégories de codes : (1) l'approximation des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace et (2) la prédiction des vitesses et fréquences de battement.

L'instabilité dynamique, qui est le plus souvent connue sous le nom de battement (*flutter*), est un phénomène aéroélastique qui conduit à des défaillances structurelles et généralement catastrophiques sur un avion. Suite aux influences des forces

aérodynamiques sur la structure d'un avion, certains modes de vibrations en flexion et en torsion apparaissent et agissent en interaction les uns par rapport aux autres de telle

sorte qu'elles produisent une augmentation progressive de l'amplitude de vibration (phénomène de battement) pouvant conduire à une destruction complète de la structure.

Il existe une vitesse critique de vol, appelée vitesse de battement (*flutter speed*), au-dessus de laquelle le phénomène de battement se produit. Étant donné son caractère destructif, les constructeurs d'avions doivent prouver que leurs aéronefs ne sont pas sujets à de tels phénomènes à l'intérieur de l'enveloppe de vol (présenté par le graphique du nombre de Mach en fonction de l'altitude). Nous présenterons dans la section 3.3 très brièvement les méthodes les plus souvent utilisées pour le calcul des vitesses et fréquences de battement. Ces méthodes sont k et pk . Nous verrons également que nous avons utilisé, dans le cadre de notre recherche, la méthode pk pour la prédiction des vitesses et fréquences de battement.

3.2 Définition de l'instabilité dynamique aéroélastique

Généralement, l'instabilité dynamique est causée par plusieurs phénomènes *aéroélastiques* qui peuvent conduire à des défaillances structurelles catastrophiques. L'interaction des rafales de vent avec la structure d'un avion est le meilleur exemple représentant un phénomène aéroélastique. La figure suivante représente un modèle simplifié (sans amortissement) du phénomène qui a deux degrés de libertés. Ce système est connu sous le nom 'pitch-plunge model'.

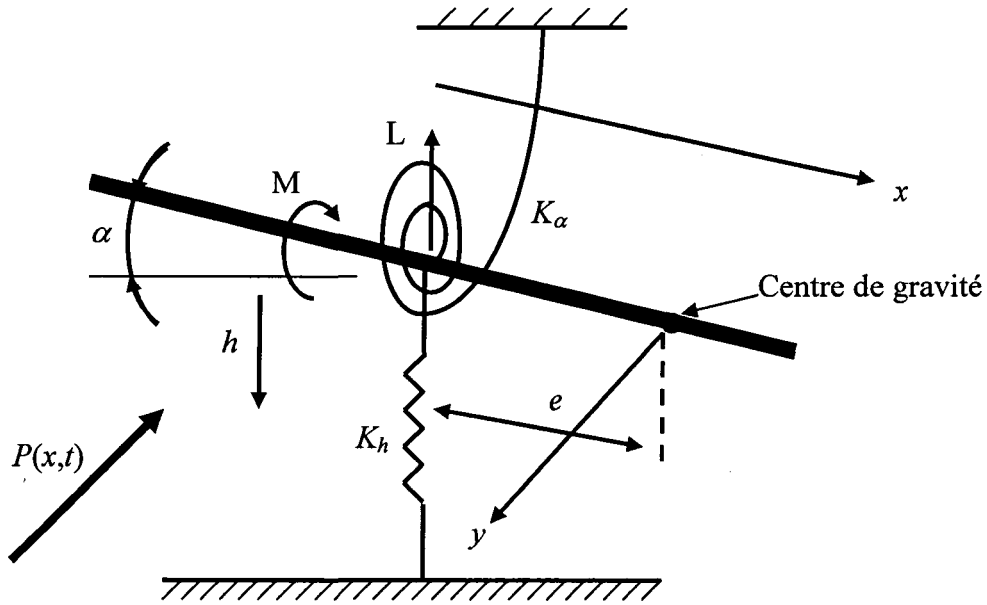


Figure 3 Modèle simplifié de l'instabilité dynamique

Dans la figure 3, $P(x,t)$ représente la pression, L et M sont respectivement la portance et le moment générés par la pression p , K_h est la constante d'élasticité du ressort vertical, K_α est la constante d'élasticité du ressort elliptique, e représente la distance entre le centre de gravité et le point d'application de la force de portance L , h et α sont respectivement le déplacement vertical et angulaire de la tige.

Les équations de mouvement de ce système (sans amortissement) sont :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 h}{dt^2} + K_h h + S_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -L \\ S_\alpha \frac{d^2 h}{dt^2} + I_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K_\alpha \alpha &= M \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $L = \int p dx$, $M = - \int p x dx$ sont la portance et le moment générés par la pression autour de la barre, K_h est la constante élastique du ressort vertical en translation, K_α est la constante élastique du ressort elliptique en torsion, S_α est la constante de rigidité du ressort elliptique, m est la masse de la barre et I_α est le moment d'inertie de la barre.

Les fréquences naturelles non couplées ω_h et ω_α sont définies comme suit :

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{m}, \omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha} \quad (3.2)$$

Le calcul de la portance L se réalise en utilisant la formule suivante :

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (3.3)$$

où ρ est la masse volumique de l'air, V est la vitesse vraie de l'avion, S est la superficie de l'aile et C_L est le coefficient de portance.

Le coefficient de portance C_L prend en compte les caractéristiques suivantes de l'aile : la forme, l'épaisseur, l'envergure, etc. De plus, pour une aile donnée, la valeur du coefficient de portance varie avec l'incidence α . Donc, en introduisant une instabilité dynamique, on agit directement sur ce coefficient qui, par conséquence, varie, d'où une approximation est proposée pour C_L :

$$C_L \approx \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha \quad (3.4)$$

L'équation de la portance devient :

$$L = q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha \quad (3.5)$$

où q_{dyn} est la pression dynamique et elle est définie en étant $q_{dyn} = \frac{1}{2} \rho V^2$. Le moment M est défini comme suit :

$$M = eL \quad (3.6)$$

Nous remplaçons les équations (3.5) et (3.6) dans le système d'équations (3.1) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 h}{dt^2} + S_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K_h h + q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha &= 0 \\ I_\alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + S_\alpha \frac{d^2 h}{dt^2} + K_\alpha \alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pour étudier la stabilité de ce système, nous supposons que les solutions du système d'équations (3.7) ont la forme suivante :

$$h = \bar{h} e^{pt} \text{ et } \alpha = \bar{\alpha} e^{pt} \quad (3.8)$$

où \bar{h} et $\bar{\alpha}$ sont les valeurs moyennes de l'allongement h et de l'angle α .

Nous déterminons par la suite, les valeurs propres p qui sont en général des nombres complexes. Dans les équations (3.8), si la partie réelle de p est positive, alors l'amplitude du mouvement (déflexions des différentes parties de l'avion) diverge exponentiellement

et l'avion devient instable (phénomène de battement). Pour calculer les valeurs propres p , le système d'équations (3.7) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} mp^2 + K_h & S_\alpha p^2 + q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ S_\alpha p^2 & I_\alpha p^2 + K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} e^{pt} \\ \bar{\alpha} e^{pt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Nous posons à zéro le déterminant de l'équation matricielle (3.9), alors nous pouvons écrire :

$$\det \begin{bmatrix} mp^2 + K_h & S_\alpha p^2 + q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ S_\alpha p^2 & I_\alpha p^2 + K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (3.10.1)$$

$$\begin{aligned} & (mp^2 + K_h) \left(I_\alpha p^2 + K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) - \left(S_\alpha p^2 \right) \left(S_\alpha p^2 + q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \\ & (mI_\alpha - S_\alpha^2) p^4 + \left[m \left(K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) + K_h I_\alpha - S_\alpha q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right] p^2 + K_h \left(K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

Nous utiliserons la notation suivante : $p^2 = r$, d'où l'équation (3.10.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$Ar^2 + Br + C = 0 \quad (3.10.2)$$

où :

$$\begin{aligned} A &= mI_\alpha - S_\alpha^2 \\ B &= m \left(K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) + K_h I_\alpha - S_\alpha q_{dyn} S \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \\ C &= K_h \left(K_\alpha - q_{dyn} S e \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \end{aligned}$$

La solution de l'équation (3.10.2) est sous la forme :

$$r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.11)$$

Ainsi dit, le phénomène de battement apparaît lorsque la partie réelle de la valeur propre p est positive et dans notre cas la variable p aura toujours une valeur positive à cause de l'égalité : $p^2 = r$ ce qui rend le système toujours instable, donc en battement. Ainsi, l'ajout de coefficients de frottements dans l'équation (3.1) stabiliserait le système.

3.3 Équations de base pour la détermination de l'instabilité dynamique

Nous avons vu que le phénomène de battement apparaît suite à l'interaction adverse des forces élastiques, des forces d'inertie et des forces d'aérodynamiques non stationnaires. Dans ces conditions, l'avion devient instable et sa structure peut être endommagée. Plus clairement, l'avion vibre en flexion et en torsion sous l'influence des forces aérodynamiques non stationnaires sur sa structure. Ces modes de vibration en flexion et en torsion agissent en interaction les uns par rapport aux autres sur l'avion de telle sorte qu'une augmentation progressive de l'amplitude de vibration apparaît qui pourrait conduire à une destruction de la structure de l'avion et de cette manière, le phénomène de battement a lieu.

Il existe une vitesse critique de vol appelée *vitesse de battement*, au-dessus de laquelle le phénomène de battement apparaît. Étant donné le caractère destructif du battement, les manufacturiers d'avions doivent prouver que leurs avions ne sont pas sujets à de tels phénomènes, d'où des méthodes adéquates de prédiction du battement sont nécessaires afin d'évaluer les vitesses et fréquences de battement.

Les équations de base pour la détermination de la stabilité de l'avion s'écrivent sous la forme suivante :

$$M \frac{d^2 q_n}{dt^2} + B \frac{dq_n}{dt} + K q_n = Q_{aérodynamiques} \quad (3.15)$$

où : q_n est le vecteur colonne de tous les modes, M est une matrice carrée d'inertie, B est une matrice carrée d'amortissement, K est une matrice carrée de rigidité, $Q_{aérodynamiques}$ représentent les forces aérodynamiques pour chaque mode de vibration.

L'équation (3.15) doit être résolue pour trouver la condition critique du battement. La méthode de battement k suppose que la matrice de rigidité $[K]$ est de type complexe, ce qui veut dire que l'équation (3.15) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\left[-M_{hh} \omega^2 + j \omega B_{hh} + (1 + jg) K_{hh} - \frac{1}{2} \rho V^2 Q_{hh} \right] \overline{q_n} = 0 \quad (3.16)$$

où : M_{hh} est la matrice d'inertie, B_{hh} est la matrice d'amortissement, K_{hh} est la matrice de rigidité, Q_{hh} est la matrice des forces aérodynamiques, ω est la fréquence angulaire et elle est égale à $2\pi f$, g est le facteur d'amortissement, ρ est la densité de l'air, V est la vitesse vraie de l'avion et j est le nombre complexe ($j^2 = -1$).

Quant à la méthode pk , elle propose d'exprimer les valeurs des matrices des forces aérodynamiques sous une forme complexe, ce qui veut dire qu'on peut transformer l'équation (3.15) dans l'équation (3.17) :

$$M_{hh} p^2 + \left(B_{hh} - \frac{1}{2} \rho V^2 Q_{hh}^i \right) p + \left(K_{hh} - \frac{1}{2} \rho V^2 Q_{hh}^r \right) \overline{q_n} = 0 \quad (3.17)$$

où $Q_{hh} = Q_{hh}^r + jQ_{hh}^i$ avec $j^2 = -1$. Les éléments de la matrice aérodynamique Q_{hh}^r et Q_{hh}^i représentent les parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques.

L'équation (3.17) est par la suite représentée sous la forme matricielle $[A - pI]\overline{q}_n = 0$, où A aura la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M_{hh}^{-1}\left(K_{hh} - \frac{1}{2}\rho V^2 Q_{hh}^r\right) & -M_{hh}^{-1}\left(B_{hh} - \frac{1}{2}\rho V^2 Q_{hh}^i\right) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La figure suivante donne un aperçu de l'allure d'un mode instable créant un phénomène de battement. Notons que dans l'équation (3.18), les termes M_{hh} , K_{hh} , B_{hh} et Q_{hh} représentent des matrices calculées par les logiciels STARS et/ou NASTRAN qui sont des programmes informatiques très puissants dans le domaine de l'analyse par éléments finis. Ainsi, un système devient instable lorsqu'une partie réelle des valeurs propres (amortissement) de la matrice A est positive.

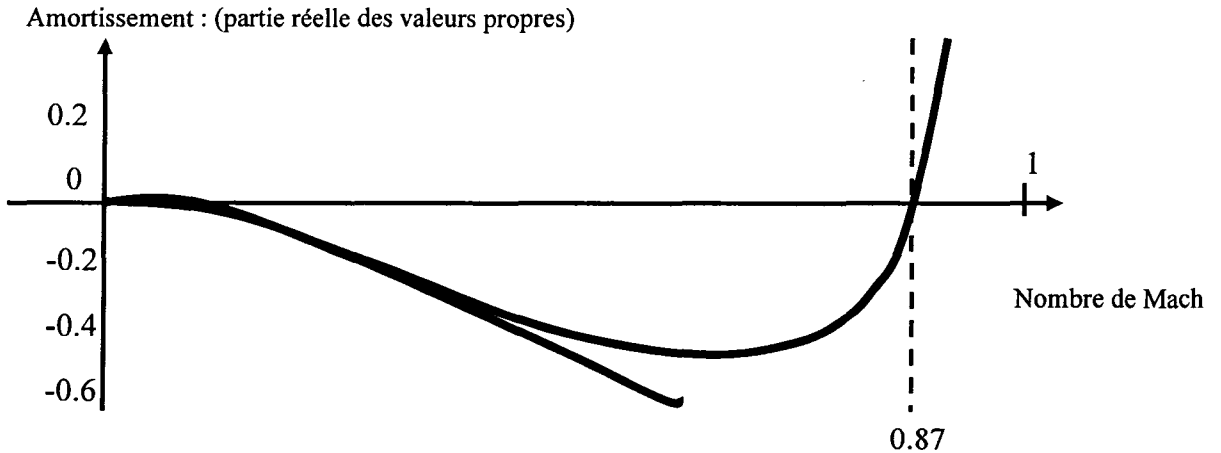


Figure 4 Exemple de calcul du battement (amortissement vs le nombre de Mach)

3.4 Présentation de l'algorithme standard pk

Généralement l'algorithme, connu sous le nom de méthode pk , est utilisé pour résoudre les équations non linéaires du même type que l'équation (3.17). En effet, ce type d'équation dépend de deux variables qui sont la vitesse vraie V et la fréquence réduite k . Ainsi, l'algorithme de pk devient un processus itératif se basant simultanément sur la variation des vitesses et la convergence des fréquences. Dans la figure 5, l'organigramme représentant l'algorithme de la méthode pk est montré.

L'algorithme peut être divisé en deux principales boucles : une première boucle qui parcourt les différentes valeurs de vitesses et une seconde boucle qui s'intéresse à la convergence des fréquences.

Nous pouvons voir sur la figure 5 qu'il existe quatre blocs dans le diagramme, dont leurs rôles sont plus qu'importants durant l'exécution de l'algorithme. Ces blocs sont numérotés par des chiffres allant de 1 jusqu'à 4.

- Le bloc no. 1 est utilisé pour effectuer l'interpolation des forces aérodynamiques par rapport à un nombre de Mach donné.
- Le bloc no. 2 est utilisé pour effectuer l'interpolation des forces aérodynamiques par rapport à une fréquence donnée.
- Le bloc no. 3 est utile pour la détermination de la plage des vitesses de battement.
- Le bloc no. 4 est nécessaire à l'analyse de convergence des fréquences de battement.

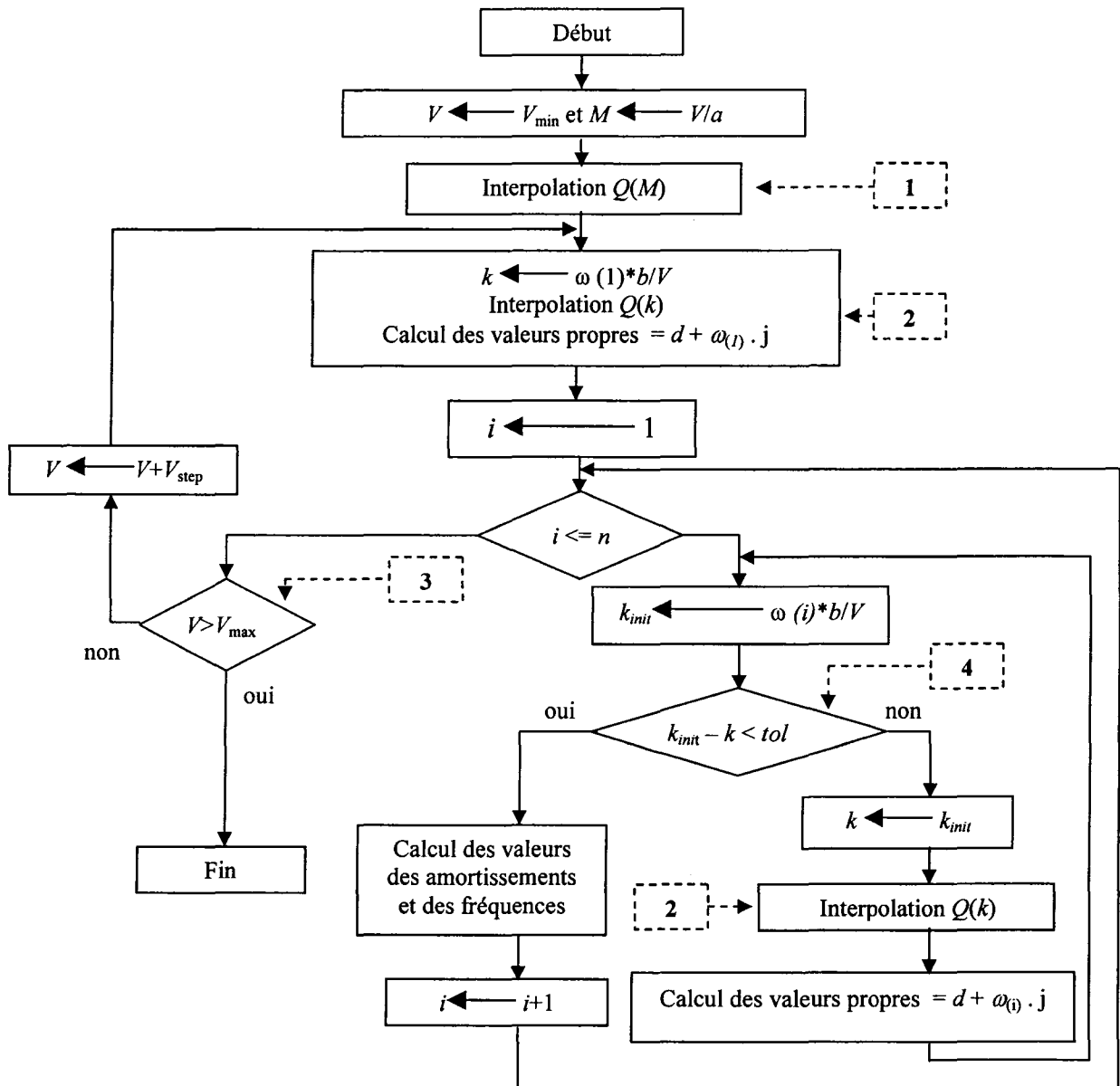


Figure 5 Algorithme de la méthode standard pk

Notons que les deux premiers blocs sont nécessaires afin de calculer les valeurs interpolées des matrices de forces aérodynamiques vu que ces forces aérodynamiques sont initialement calculées par les logiciels d'analyse par des éléments finis en fonction d'un ensemble de nombre de Mach et des fréquences réduites.

Les deux points suivants doivent être pris en considération lors de l'exécution de l'algorithme standard de la méthode pk :

1. La qualité de l'interpolation des forces aérodynamiques par rapport à la fréquence réduite k ou au nombre de Mach peut nuire ou améliorer les valeurs finales de ces forces.
2. Des mauvaises valeurs choisies pour ' V_{max} ' ou ' tol ' peuvent conduire à des mauvaises prédictions des vitesses et ou des fréquences de battement.

Pour les analyses des interactions aéroserveoélastiques, nous verrons que les forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace seront intégrées dans la matrice A exprimée par l'équation (3.18). Par conséquent, nous avons modifié l'algorithme standard de la méthode pk de la façon suivante :

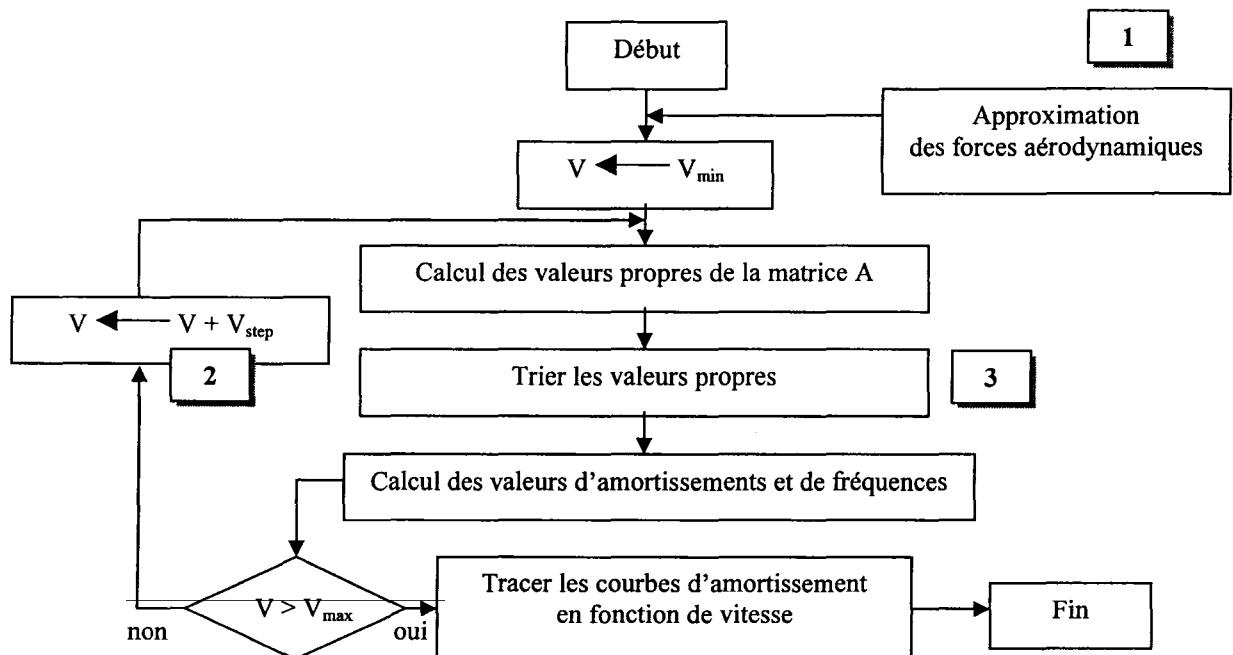


Figure 6 Version modifiée de la méthode pk de battement

Tel que constaté dans la figure 6, la nouvelle version de la méthode *pk* ne nécessite qu'une seule principale boucle, celle qui fera le balayage de l'ensemble des vitesses pouvant inclure des vitesses pour lesquelles les phénomènes de battement pourraient apparaître. La nouvelle version de l'algorithme *pk* va réduire d'une façon considérable le risque d'obtention d'un résultat erroné.

La réponse finale ne dépendra que de trois blocs :

- Le premier bloc sert à approximer les forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace.
- Le deuxième bloc est utilisé pour balayer la plage de vitesses dans laquelle l'analyse des forces aérodynamiques doit s'effectuer.
- Le troisième bloc est utilisé pour trier les valeurs propres et pour tracer les courbes des amortissements et des fréquences en fonction des vitesses.

Nous pouvons conclure qu'à cette étape, la qualité de l'approximation est primordiale au bon fonctionnement du nouvel algorithme. Dans les chapitres 5, 6 et 7, nous nous intéresserons à de nouvelles méthodes d'approximation des forces aérodynamiques pouvant conduire aux mêmes résultats de battements (vitesses et fréquences) que ceux obtenus par la méthode *pk*.

3.5 Tri des valeurs propres

Dans la figure 6, un bloc, numéroté par 3, est consacré au tri des valeurs propres. Cependant, quelle est la raison principale de l'ajout de ce bloc et quelle est son importance vis à vis des résultats de la méthode *pk* ? Pour répondre à ces deux questions, analysons tout d'abord la figure suivante qui a été générée par l'outil développé durant cette étude :

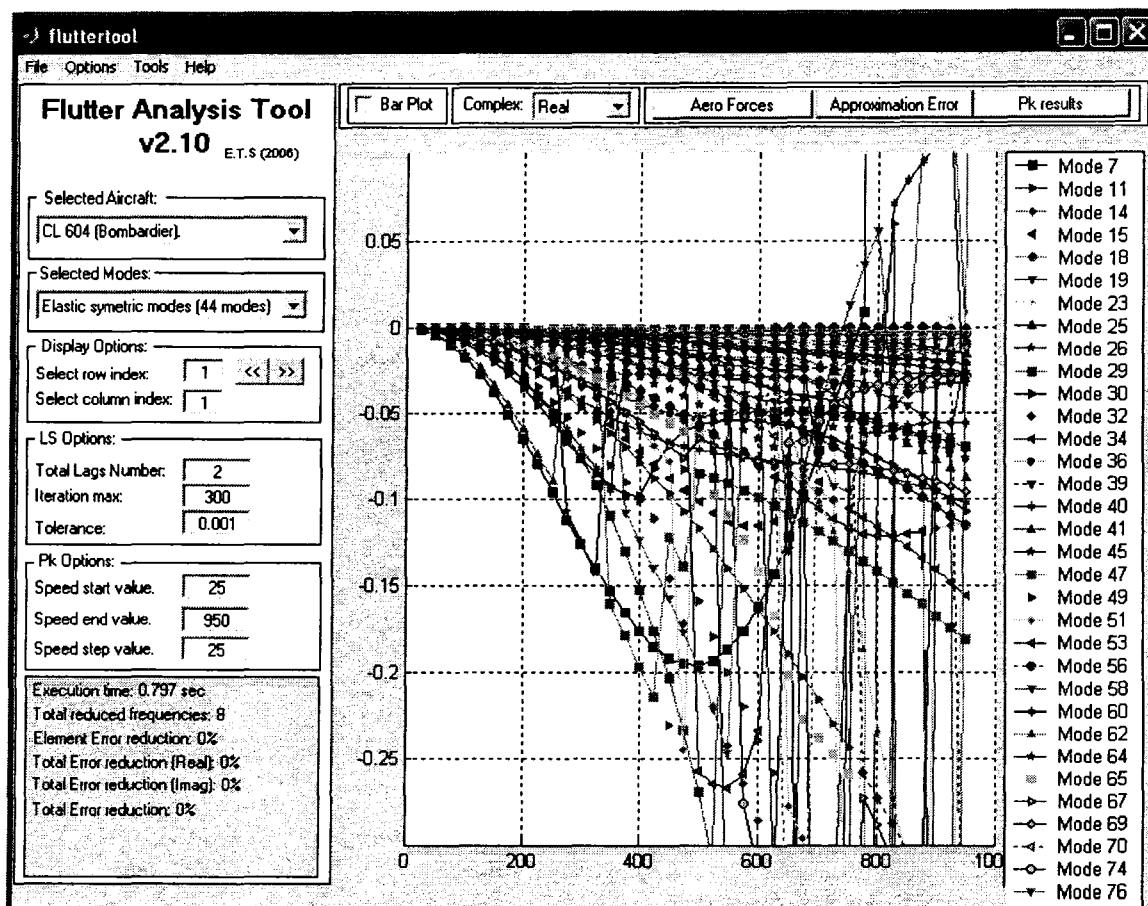


Figure 7 Modes non triés calculés par la méthode *pk* de battement

Les résultats exprimés sous formes de modes représentés dans la Figure 7 ont été obtenus en appliquant la méthode *LS* avec deux termes de retard sur le modèle élastique de l'avion (Voir l'option **Total Lags Number** sur la même figure). Nous remarquons, sur la partie droite de la figure 7, les couleurs et symboles associées à l'ensemble des courbes représentant les résultats pour des différents modes. En analysant l'allure de chaque courbe, nous nous rendons vite compte qu'un problème de continuité existe. Presque toutes ces courbes sont mal tracées, ce qui est dû au fait que les valeurs propres ne sont pas triées selon leurs modes correspondants. Les couleurs et symboles sont rajoutés aux courbes pour mieux illustrer ce problème qui nécessite bien sur une correction. Suite à ce problème, l'analyse des fréquences et des vitesses peut être erronée

ce qui peut avoir des conséquences sur la détermination des correctes valeurs des vitesses et fréquences de battement.

Ainsi dit, un bloc de tri des valeurs propres a été rajouté à l'algorithme de la méthode de battement *pk* tel qu'illustré dans la Figure 6. Avant la mise au point d'une logique efficace de tri, nous supposons que la variation de l'allure des différentes courbes se fait d'une manière douce. De cette façon, la logique du tri sera basée sur le calcul de la plus petite distance séparant deux valeurs de l'amortissement calculées à deux itérations successives. Un point lorsqu'il est associé à une courbe, il est par la suite automatiquement enlevé des choix possibles pour la construction des courbes suivantes, voir la Figure 8 :

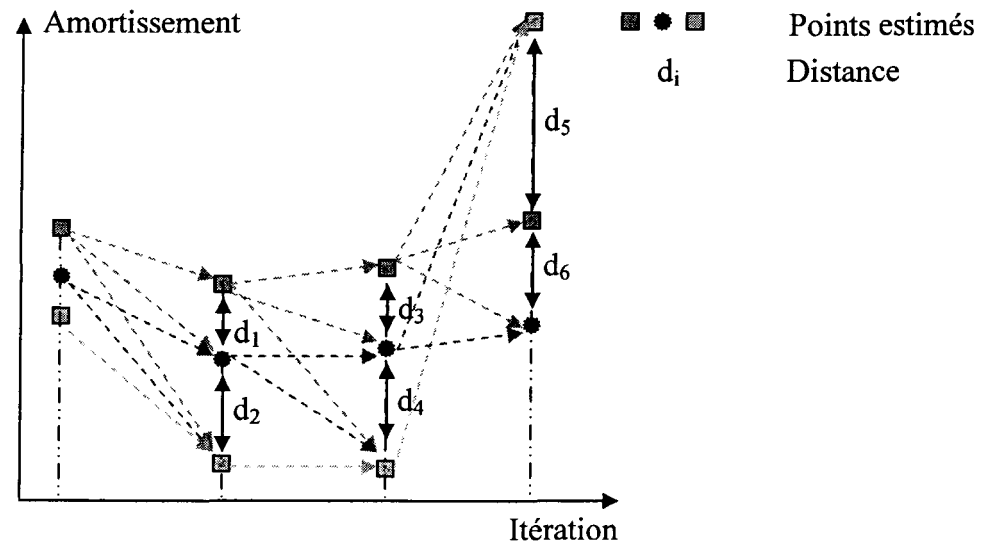


Figure 8 Méthode de tri utilisée dans l'algorithme *pk* de battement

L'un des problèmes majeurs que peut représenter cette méthode de tri est qu'une courbe peut être construite à partir de plusieurs segments de modes différents, ce qui n'est pas souhaitable. Par exemple, ce problème peut apparaître lorsque deux valeurs

d'amortissement calculées à la même itération sont très rapprochées. Ce cas va sans doute créer la situation dénotée par : '**chevauchement de modes**'. Ainsi, la définition du chevauchement de modes est une courbe qui commence par un certain mode et empreinte une partie d'une courbe d'un autre mode. Pour atténuer le nombre de chevauchements une solution simple et efficace consiste à augmenter le pas entre chaque itération. Cependant agrandir le pas des itérations peut sérieusement nuire à la qualité de la valeur de la vitesse de battement lorsque celui-ci est détecté. Dans ce cas précis, il faut au contraire réduire le pas pour s'approcher de la valeur réelle de la vitesse de battement. En faisant varier le pas de calcul, nous sélectionnons celui qui nous permettra d'obtenir des meilleurs résultats, voir la Figure 9 ci-dessous :

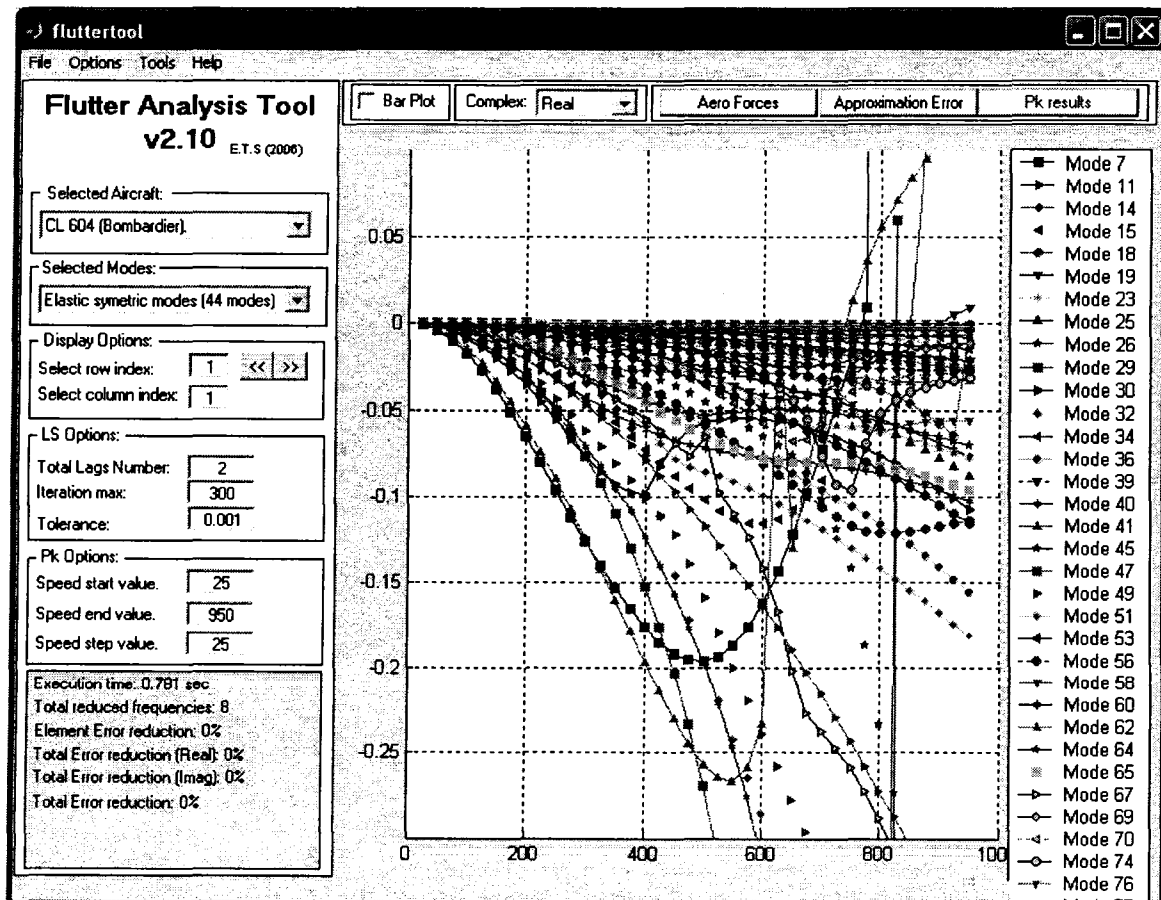


Figure 9 Modes triés calculés par la méthode *pk* de battement

CHAPITRE 4

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ET DE L'ÉTAT MINIMAL

(LS ET MS)

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté les trois catégories de codes existants dans l'industrie aéronautique. Nous présentons dans ce chapitre les méthodes d'approximation classiques *LS* et *MS* et les résultats obtenus avec la méthode *LS* avec et sans l'utilisation de plusieurs méthodes d'optimisation. Suite à ces derniers types de résultats, nous avons choisi la meilleure méthode d'optimisation à utiliser pour les méthodes d'approximation des forces aérodynamiques pour les études des interactions aéroserveoélastiques.

4.1 Introduction

En général, la théorie de l'approximation s'intéresse à deux types de problèmes. Le premier problème apparaît lorsqu'on a une fonction analytique et que l'utilisateur souhaite trouver une fonction plus simple qui approche la première fonction. Nous prendrons à titre d'exemple l'approximation de la fonction exponentielle de $-x$ en utilisant la série de Taylor ou Maclaurin. Le second problème apparaît lorsqu'un usager souhaite, à partir de valeurs discrètes (valeurs échantillonnées), connaître une fonction qui passe par tous les points de l'ensemble des valeurs discrètes. Dans ce chapitre nous nous intéresserons à la deuxième classe d'approximation, à savoir trouver les meilleures fonctions qui s'approchent le mieux des valeurs discrètes.

4.2 Méthode *LS*

4.2.1 La méthode standard des moindres carrés (*LS*)

La méthode d'approximation par les moindres carrés *LS* consiste à approximer la matrice des forces aérodynamiques Q par la somme de termes représentants des

polynômes de Padé [1, 2, 6, 7]. L'expression générale des forces aérodynamiques est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{Q} = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_n A_{n+2} \frac{s}{s + b_n} \quad (4.1)$$

où n est le nombre total des fonctions rationnelles.

Nous exprimons \hat{Q} sous sa forme complexe:

$$\hat{Q} = \hat{Q}_R + j \hat{Q}_I \quad (4.2)$$

où j est le nombre complexe et $s = jk$, alors nous trouvons à partir de l'équation (4.1), les expressions des parties réelles et imaginaires \hat{Q}_R et \hat{Q}_I des forces aérodynamiques:

$$\hat{Q}_R = A_0 - A_2 k^2 + \sum_n A_{n+2} \frac{k^2}{k^2 + b_n^2} \quad (4.3)$$

$$\hat{Q}_I = A_1 k + \sum_n \frac{b_n k}{k^2 + b_n^2} \quad (4.4)$$

Pour toutes les fréquences réduites k_l pour $l = 1, \dots, L$ où L est un entier positif et tous les n termes de retard représentés par b_i , nous pouvons définir deux termes \hat{Q}_{RI} et \hat{Q}_{II} comme suit :

$$\hat{Q}_{RI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1^2 & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_1^2} & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_2^2} & \dots & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_n^2} \\ 1 & 0 & -k_2^2 & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_1^2} & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_2^2} & \dots & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & -k_L^2 & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_1^2} & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_2^2} & \dots & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q}_{II} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \frac{k_1 b_1}{k_1^2 + b_1^2} & \frac{k_1 b_2}{k_1^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_1 b_n}{k_1^2 + b_n^2} \\ 0 & k_2 & 0 & \frac{k_2 b_1}{k_2^2 + b_1^2} & \frac{k_2 b_2}{k_2^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_2 b_n}{k_2^2 + b_n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & k_L & 0 & \frac{k_L b_1}{k_L^2 + b_1^2} & \frac{k_L b_2}{k_L^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_L b_n}{k_L^2 + b_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_{n+2} \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que les matrices \hat{Q}_{RI} et \hat{Q}_{II} peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\hat{Q}_{RI} = B_R \{A\} \quad \text{et} \quad \hat{Q}_{II} = B_I \{A\}$$

où :

$$B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_1^2 & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_1^2} & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_1^2}{k_1^2 + b_n^2} \\ 1 & 0 & -k_2^2 & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_1^2} & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_2^2}{k_2^2 + b_n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & -k_L^2 & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_1^2} & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_L^2}{k_L^2 + b_n^2} \end{bmatrix}$$

$$B_I = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \frac{k_1 b_1}{k_1^2 + b_1^2} & \frac{k_1 b_2}{k_1^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_1 b_n}{k_1^2 + b_n^2} \\ 0 & k_2 & 0 & \frac{k_2 b_1}{k_2^2 + b_1^2} & \frac{k_2 b_2}{k_2^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_2 b_n}{k_2^2 + b_n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & k_L & 0 & \frac{k_L b_1}{k_L^2 + b_1^2} & \frac{k_L b_2}{k_L^2 + b_2^2} & \cdots & \frac{k_L b_n}{k_L^2 + b_n^2} \end{bmatrix}$$

Nous définissons les nouvelles formes compactes B_{RI} et B_{II} des termes B_R et B_I ainsi que la matrice $\{A\}$ comme suit :

$$B_{Rl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_l^2 & \frac{k_l^2}{k_l^2 + b_1^2} & \frac{k_l^2}{k_l^2 + b_2^2} & \dots & \frac{k_l^2}{k_l^2 + b_n^2} \end{bmatrix}$$

$$B_{ll} = \begin{bmatrix} 0 & k_l & 0 & \frac{k_l b_1}{k_l^2 + b_1^2} & \frac{k_l b_2}{k_l^2 + b_2^2} & \dots & \frac{k_l b_n}{k_l^2 + b_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = [A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad \dots \quad A_{n+2}]^{Transpose}$$

\hat{Q}_{Rl} et \hat{Q}_{ll} peuvent être finalement écrit sous la forme suivante :

$$\hat{Q}_{Rl} = [B_{Rl}] \{A\} \quad \text{et} \quad \hat{Q}_{ll} = [B_{ll}] \{A\} \quad (4.5)$$

Ainsi, l'objectif est de trouver les valeurs des coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ qui minimisent l'erreur quadratique suivante :

$$J = \sum_i \sum_j \sum_l \left| Q_{ij}(k_l) - \hat{Q}_{ij}(k_l) \right|^2 \quad (4.6)$$

Nous fixons les valeurs des termes de retard aérodynamiques b_n , alors la fonction objective J peut être minimisée par rapport à la matrice inconnue A , ainsi les dérivées partielles de J par rapport aux coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ sont mises à zéro :

$$\frac{\partial J}{\partial A_{0,1,2,\dots,n+2}} = 0 \quad (4.7)$$

Nous remplaçons les équations (4.3)-(4.5) dans les équations (4.6) et (4.7) et nous obtenons :

$$\{A\} = \left\{ \sum_l (B_{Rl}^T B_{Rl} + B_{ll}^T B_{ll}) \right\}^{-1} \left\{ \sum_l (B_{Rl}^T Q_{Rl} + B_{ll}^T Q_{ll}) \right\} \quad (4.8)$$

4.2.2 La méthode standard des moindres carrés (LS) optimisée

Nous remarquons que la qualité des résultats exprimés sous la forme des approximations des forces aérodynamiques obtenues par la méthode standard des moindres carrés dépend des valeurs des termes de retards aérodynamiques b_n .

Ainsi dit, la modification proposée à la méthode standard des moindres carrés consiste dans l'introduction d'une méthode d'optimisation par laquelle nous trouvons les valeurs optimales des termes de retard aérodynamiques b_n .

Rappelons que les techniques d'optimisation utilisent une fonction à optimiser, appelée *fonction objective*, qui est sujette à plusieurs contraintes. Dans ce mémoire, nous utilisons les fonctions d'optimisation programmées en Matlab appelées *fmincon*, *fminimax* et *fminsearch*.

Selon le manuel d'utilisation de Matlab, la fonction numérique intitulée *fmincon* cherche un minimum d'une fonction non-linéaire à plusieurs variables qui peut être sujet à des contraintes. Cette fonction *fmincon* ne traite que des variables réelles. De plus la fonction à minimiser doit être continue. '*fmincon*' peut donner des solutions locales.

Cependant, la deuxième fonction numérique appelée *fminimax* résout un problème de type :

$$\min_x \max_{\{F_i\}} \{F_i(x)\}$$

tel que :

$$c(x) \leq 0, ceq(x) = 0, A.x \leq b, Aeq . x = beq \text{ et } lb \leq x \leq ub$$

où x , b , beq , lb et ub sont des vecteurs, A et Aeq sont des matrices, $c(x)$, $ceq(x)$, et $F(x)$ sont des fonctions qui retournent des vecteurs. $F(x)$, $c(x)$, et $ceq(x)$ peuvent être des fonctions non linéaires.

La fonction *fminsearch* est une fonction de minimisation multidimensionnelle non-linéaire qui n'utilise pas des contraintes et l'algorithme Nelder-Mead est codé dans cette fonction – qui donne le minimum local.

Le nouvel algorithme qu'on a réalisé est présenté par le schéma suivant :

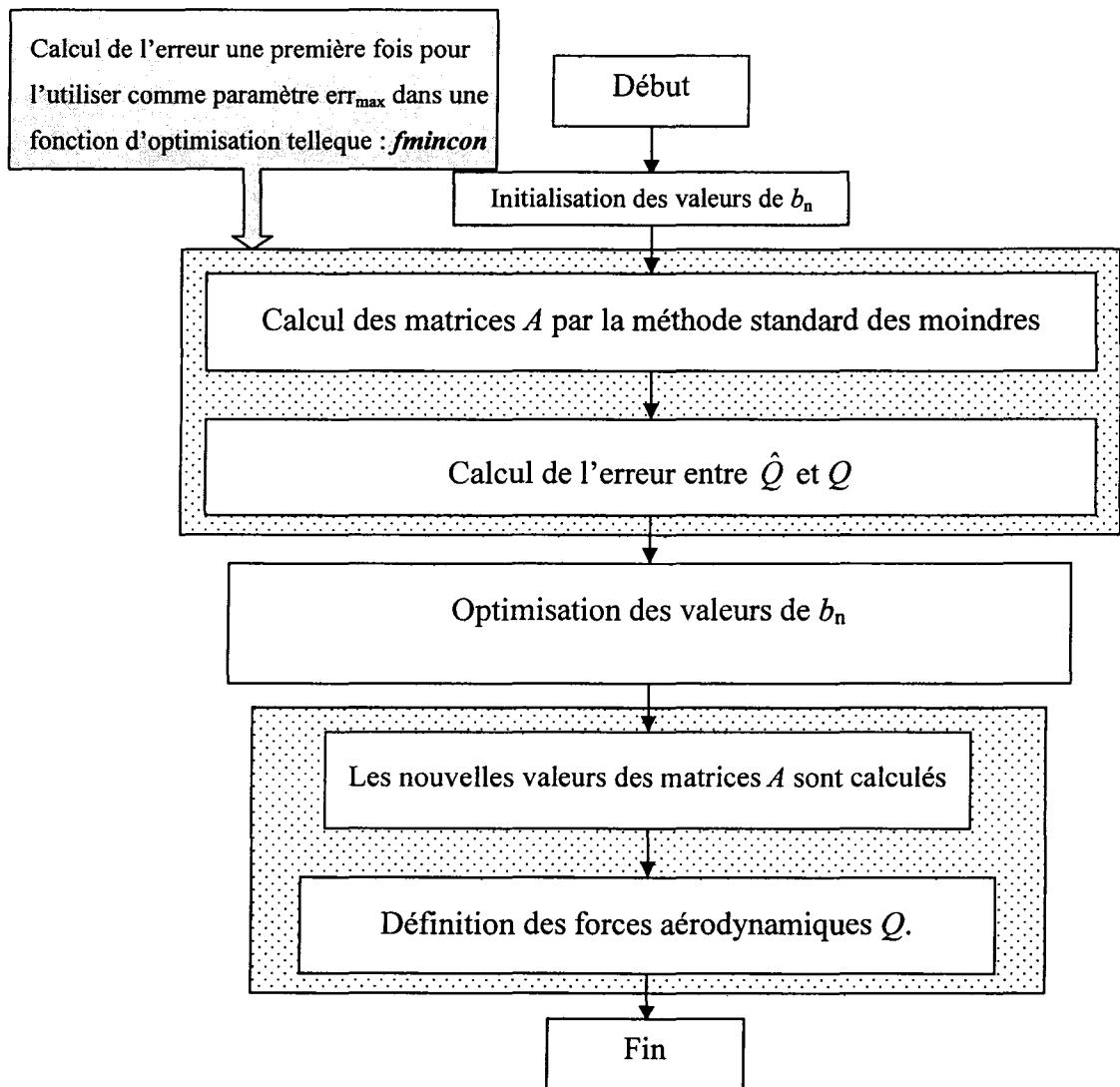


Figure 10 Nouvelles versions de l'algorithme *LS*

4.2.3 Résultats d'optimisation des termes de retards

Dans ce qui suit, les termes de retards b_n optimisés ont été obtenus pour l'avion Challenger CL604 de Bombardier Aéronautique. Cet avion a été sélectionné pour son grand nombre de modes (44 modes symétriques et 50 modes anti-symétriques). Les résultats sont résumés dans des tableaux selon les deux types de modes symétriques et antisymétriques et selon le nombre total des termes de retards par les trois méthodes d'optimisation Fmincon, Fminimax et Fminsearch:

4.2.3.1 Résultats pour les modes symétriques

Dans cette section nous présentons six tableaux des résultats exprimés sous forme de temps d'exécution et des termes de retard selon leur nombre et le type de la méthode d'optimisation (Fmincon, Fminimax, Fminsearch) utilisée pour les modes symétriques. Notons que les caisses des tableaux ci-dessous apparaissant en gris correspondent aux résultats les moins souhaitables, comme un très grand temps d'exécution ou aux des valeurs de termes de retard en dehors des limites acceptables correspondantes aux valeurs des fréquences réduites (entre 0 et 1.4). Il est à noter que le temps d'exécution est donné en secondes.

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1
Fmincon	8.031	0.4133
Fminimax	14.344	0.4133
Fminsearch	12.781	0.4133

Nombre des termes de retard égal à 1

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2
Fmincon	14.14	0.5256	0.7764
Fminimax	67.688	0.65	0.6514
Fminsearch	93.171	0.6507	0.6507

Nombre des termes de retard égal à 2

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3
Fmincon	31.719	0.4895	1.4	1.3974
Fminimax	114.734	0.8866*10-3	0.9439*10-3	0.8024*10-3
Fminsearch	187.75	0.488	0.4881	0.4968

Nombre des termes de retard égal à 3

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4
Fmincon	91.563	0.5454	0.1933	0.4508	0.3713
Fminimax	159.421	0.001	1.001	0.4439	1.4
Fminsearch	198.688	0.5187	0.5182	0.5164	8.1523

Nombre des termes de retard égal à 4

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Fmincon	82.578	1.0316	0.3311	0.4123	0.2323	0.3432
Fminimax	159.562	0.4293	1.3115	0.001	0.001	0.6598
Fminsearch	187.25	0.4332	0.4191	0.3984	0.4245	7.2122

Nombre des termes de retard égal à 5

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
Fmincon	65.078	1.0004	0.8844	1.2352	0.0386	0.0347	0.0417
Fminimax	195.016	0.2962	0.568	0.5746	0.7838	0.4193	0.5429
Fminsearch	201	0.3601	0.497	0.4103	0.4152	4.8708	10.6588

Nombre des termes de retard égal à 6

4.2.3.2 Résultats pour les modes anti-symétriques

Dans cette partie aussi, six autres tableaux concernant les résultats obtenus par trois méthodes d'optimisation qui utilisent un nombre différent des termes de retards correspondant aux modes antisymétriques sont montrés. Ici aussi, et pour les mêmes raisons que dans la précédente section, les moins bons résultats apparaissent dans ces tableaux en gris. Il est à noter que le temps d'exécution est en secondes.

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1
Fmincon	8.859	0.7378
Fminimax	13.75	0.7378
Fminsearch	14.703	0.7378

Nombre des termes de retard égal à 1

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2
Fmincon	57.047	0.7431	0.7435
Fminimax	53.593	0.7432	0.7471
Fminsearch	37.718	0.7438	0.7436

Nombre des termes de retard égal à 2

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3
Fmincon	41.984	0.437	1.4	0.4406
Fminimax	126.39	0.9618	1.5162	1.5162
Fminsearch	220.297	0.5609	0.5237	0.5609

Nombre des termes de retard égal à 3

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4
Fmincon	57.531	0.8835	0.989	0.8347	0.4078
Fminimax	161.797	0.3955	1.4	1.0053	1.09
Fminsearch	299.813	0.5949	0.5757	0.5758	6.9235

Nombre des termes de retard égal à 4

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Fmincon	204.891	1.1276	1.0288	0.9493	1.1336	0.4327
Fminimax	215.938	0.1584	0.712	0.4928	0.7443	1.4
Fminsearch	276.219	0.8199	0.8519	0.7809	0.788	6.0539

Nombre des termes de retard égal à 5

Méthode d'optimisation	Temps d'exécution	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
Fmincon	142.641	1.343	0.7888	0.191	0.5793	1.4	0.7376
Fminimax	boucle infinie	-	-	-	-	-	-
Fminsearch	387.796	0.8318	0.74	0.8447	0.8541	3.8457	5.6171

Nombre des termes de retard égal à 6

4.2.4 Conclusions

La méthode d'optimisation de MATLAB donnant les meilleures approximations des forces aérodynamiques est la méthode *fmincon* du aux résultats obtenus et au temps d'exécution. En effet, dans certains cas, la méthode *fminimax* ne converge pas ou donne des valeurs aux retards proches de zéros. Dans d'autres cas, la méthode *fminsearch* donne des valeurs de retards supérieures à la plus grande valeur de fréquence réduite dont nous disposons, alors que nous nous attendions à obtenir des valeurs des termes de retard comprises dans l'ensemble des fréquences réduites k (0.001, ...1.4). Nous remarquons aussi qu'en général, le temps d'exécution de la méthode *fmincon* est plus petit que les deux autres méthodes. C'est pour ces deux raisons que la méthode d'optimisation *fmincon* sera choisie dans cette thèse.

4.3 Méthode MS

4.3.1 La méthode standard MS

Les forces aérodynamiques sont approximées par la méthode d'état minimal (MS) [3] :

$$Q_{MS}(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + D(sI - R)^{-1} E s \quad (4.9)$$

où A_0 , A_1 , A_2 , D , R et E sont des matrices à déterminer.

Pour réduire le nombre de matrices à calculer, les contraintes suivantes sont imposées :

$$\operatorname{Re}\{Q_{MS}(0)\} = \operatorname{Re}\{Q(0)\} \quad (4.10)$$

$$\operatorname{Re}\{Q_{MS}(jk_f)\} = \operatorname{Re}\{Q(jk_f)\} \quad (4.11)$$

$$\operatorname{Im}\{Q_{MS}(jk_g)\} = \operatorname{Im}\{Q(jk_g)\} \quad (4.12)$$

où k_f et k_g sont les fréquences du battement et de rafale calculées à partir d'essais. La première contrainte implique:

$$A_0 = Q_R(0) \quad (4.13)$$

La seconde contrainte implique:

$$\begin{aligned} Q_R(jk_f) &= A_0 - A_2 k_f^2 + D(k_f^2 I + R^2)^{-1} E k_f^2 \\ &= A_0 - A_2 k_f^2 + D k_f^2 I [k_f^2 I + R^2]^{-1} E \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous remplaçons l'équation (4.13) dans l'équation (4.14), et nous obtenons :

$$Q_R(jk_f) = Q_R(0) - A_2 k_f^2 + D k_f^2 I [k_f^2 I + R^2]^{-1} E \quad (4.15)$$

Donc :

$$A_2 = \frac{Q_R(0) - Q_R(jk_f)}{k_f^2} + D [k_f^2 I + R^2]^{-1} E \quad (4.16)$$

À partir de la troisième contrainte, nous obtenons:

$$A_1 = \frac{Q_I(jk_g)}{k_g} + D [k_g^2 I + R^2]^{-1} R E \quad (4.17)$$

Nous remarquons que les expressions des termes A_1 et A_2 sont en fonction des matrices D , E et R . En d'autres termes, il suffit de trouver les valeurs des matrices D , E et R pour résoudre le problème.

La procédure de la méthode *MS* peut être résumée comme suit :

- 1- On choisit n_a le nombre d'états augmentés (l'ordre de la matrice R).
- 2- On choisit la matrice diagonale R . Les éléments de R doivent être distincts deux à deux.
- 3- On fixe D .
- 4- Le problème de minimisation de J devient un problème linéaire classique de moindres carrés, ainsi chaque colonne j de la matrice E est trouvée.
- 5- Avec la matrice E trouvée, on minimise encore une fois J . Le problème devient encore une fois un problème linéaire de moindres carrés avec D comme inconnue.
- 6- On répète ces étapes jusqu'à la convergence de l'algorithme.

Si la précision n'est pas satisfaisante, on augmente n_a et on recommence depuis l'étape no. 2.

CHAPITRE 5

MÉTHODES CORRIGÉES

Dans le précédent chapitre, nous avons présenté les deux méthodes standard utilisées pour l'approximation des forces aérodynamiques. Nous avons également vu une version optimisée de la méthode *LS* dans laquelle les valeurs des coefficients de retard sont calculées au lieu d'être fixés d'une façon aléatoire. Dans le présent chapitre, nous présenterons les deux nouvelles méthodes qui sont les versions corrigées des méthodes standard *LS* et *MS* et appelées *CLS* et *CMS* ainsi qu'une troisième nouvelle méthode combinant les deux formulations standard de la *LS* et *MS*.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons de nouvelles formulations corrigées des méthodes des moindres carrées *LS* '*Least Square*' et *MS* '*Minimum State*' dans lesquelles l'erreur d'approximation est écrite sous la même forme analytique que celle des forces aérodynamiques exprimées par la méthode *LS* ou la *MS*. Nous rappelons que l'erreur d'approximation est la différence entre les forces aérodynamiques calculées initialement dans le domaine de fréquence et leurs approximations dans le domaine de Laplace. En général, les erreurs finales produites par les algorithmes approximation ne sont jamais prises en compte et elles sont toujours supposées être très petites, voir nulles. Cependant dans plusieurs cas, il s'était avéré que ces erreurs pouvaient avoir des grandes valeurs, et pour cette raison leurs influences sur les résultats finaux ne devraient pas être négligées.

5.2 Présentation de la méthode *CLS*

Les valeurs des erreurs d'approximation sont directement liées au nombre des termes de retard. D'ailleurs, c'est pour cette raison que les ingénieurs augmentent le nombre de termes de retard appliqué aux forces aérodynamiques approximées par la méthode '*LS*', dans le but de mieux approximer les forces aérodynamiques calculées, initialement dans

le domaine de fréquence, dans le domaine de Laplace. Par contre, l'augmentation du nombre de termes de retard conduit à l'augmentation du nombre d'états dans les matrices du système dynamique final de l'avion.

Nous appelons la nouvelle méthode '*Corrected Least Square*' ou '*CLS*' (Voir l'annexe 1). Dans cette méthode la nouvelle approximation des forces aérodynamiques est présentée pour un nombre de Mach donné, voir l'équation (5.1) :

$$Q_{CLS}(s) = Q_{LS}(s) + e(s) \quad (5.1)$$

où $Q_{CLS}(s)$ est la matrice des forces aérodynamiques calculée en fonction de la variable de Laplace s par la nouvelle méthode *CLS*, $e(s)$ dénote l'erreur d'approximation et $Q_{LS}(s)$ est la matrice des forces aérodynamiques calculée par la méthode classique *LS* et elle est représentée dans l'équation (5.2) :

$$Q_{LS}(s) = A_0 + A_1s + A_2s^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}}{s + b_i}s \quad (5.2)$$

où n représente le nombre de termes de retard, A_i ($i = 0, 1, \dots, n + 2$) est un ensemble de matrices de dimensions ($r \times c$) et b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) est un ensemble de termes de retard.

Les deux étapes principales dans l'approximation des forces aérodynamiques $Q(s)$ par la nouvelle méthode *CLS* sont les suivantes :

- La première étape consiste à approximer $Q_{LS}(s)$ à partir des données des forces aérodynamiques $Q_{données}$ dans le domaine de fréquence et pour un nombre de Mach en utilisant la méthode '*Least Square*' *LS* avec la partie d'optimisation des valeurs de retards. Dans cette première partie, les valeurs des matrices $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+2}$ et les valeurs des termes de retard $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ sont fixés.

- Dans la deuxième étape, il faut évaluer, dans le domaine de Laplace, l'erreur entre les données aérodynamiques dans le domaine de fréquence $Q_{données}$ et les valeurs de Q_{LS} . Cette erreur est exprimée avec l'équation suivante :

$$e(s) = Q_{données} - Q_{LS} \quad (5.3)$$

L'erreur $e(s)$ n'a pas une forme analytique bien précise. L'équation (5.3) nous donne la matrice de données 'e' que nous voulons représenter sous une forme analytique. Pour cette raison, et afin de garder les avantages de la méthode des moindres carrés 'LS', nous allons choisir une forme analytique pour $e(s)$ semblable à celle de $Q_{LS}(s)$, en d'autres termes, $Q_{LS}(s)$ et $e(s)$ doivent avoir la même forme analytique.

Dans ce qui suit, nous montrons un exemple de calcul des approximations des forces aérodynamiques par la nouvelle méthode *CLS* en se basant sur la méthode *LS*. Nous choisissons, pour cet exemple, un nombre minimum de deux termes de retard estimés par la méthode *LS* et dénotés par b_1^{LS} et b_2^{LS} . Nous écrivons l'approximation de ces forces aérodynamiques sous la forme suivante :

$$Q_{LS}(s) = A_0^{LS} + A_1^{LS}s + A_2^{LS}s^2 + \frac{A_3^{LS}}{s + b_1^{LS}}s + \frac{A_4^{LS}}{s + b_2^{LS}}s \quad (5.4)$$

où $A_0^{LS}, A_1^{LS}, A_2^{LS}, A_3^{LS}, A_4^{LS}, b_1^{LS}$ et b_2^{LS} sont calculées par la méthode *LS*.

Dans cet exemple, nous supposons que $e(s)$ a la même forme analytique que les forces aérodynamiques approximées par la méthode *LS* et dénotées par $Q_{LS}(s)$, c'est à dire que $e(s)$ s'écrit comme suit (nous introduisons la notation $e_{analytique}(s)$ pour éviter les confusions):

$$e_{analytique}(s) = A_0^{err} + A_1^{err}s + A_2^{err}s^2 + \frac{A_3^{err}}{s + b_1^{err}}s + \frac{A_4^{err}}{s + b_2^{err}}s \quad (5.5)$$

où le même nombre et les mêmes valeurs des termes de retard (égal à 2) ont été considérés que pour les approximations des forces aérodynamiques approximées par la méthode *LS*, voir l'équation suivante :

$$b_1^{err} = b_1 \text{ et } b_2^{err} = b_2 \quad (5.6)$$

Nous introduisons les termes de retard b_1 et b_2 exprimés par l'équation (5.6) dans l'équation (5.5) et nous obtenons l'équation suivante pour l'erreur d'approximation :

$$e_{analytique}(s) = A_0^{err} + A_1^{err}s + A_2^{err}s^2 + \frac{A_3^{err}}{s + b_1}s + \frac{A_4^{err}}{s + b_2}s \quad (5.7)$$

Nous observons que les forces aérodynamiques $Q_{LS}(s)$ et l'erreur d'approximation $e(s)$ s'expriment sous la même forme analytique suivante :

$$Q_{LS}(s) = A_0^{LS} + A_1^{LS}s + A_2^{LS}s^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{LS}}{s + b_i}s \quad (5.8)$$

$$e_{analytique}(s) = A_0^{err} + A_1^{err}s + A_2^{err}s^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{s + b_i}s \quad (5.9)$$

où A_i^{err} est un ensemble des matrices de l'erreur avec les dimensions $(r \times c)$, n est le nombre de termes de retard et b_i sont les termes de retard calculés par la méthode '*Least Square*'. En supposant que la partie réelles de l'erreur est négligeable, nous définissons pour chaque élément d'indice r et c de la matrice des forces aérodynamiques Q un critère quadratique de minimisation $J_{(r,c)}$ comme suit :

$$\begin{aligned}
J_{(r,c)} &= \sum_{j=1}^l [e_{(r,c)}(s_j) - (e_{analytique})_{(r,c)}(s_j)]^2 \\
&= \sum_{j=1}^l \left[e_{(r,c)}(s_j) - \left((a_0^{err})_{(r,c)} + (a_1^{err})_{(r,c)} s_j + (a_2^{err})_{(r,c)} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{(r,c)}}{s_j + b_i} s_j \right) \right]^2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

avec :

$$A_i^{err} = \begin{bmatrix} (a_i^{err})_{(1,1)} & (a_i^{err})_{(1,2)} & (a_i^{err})_{(1,3)} & \dots & (a_i^{err})_{(1,c)} \\ (a_i^{err})_{(2,1)} & (a_i^{err})_{(2,2)} & (a_i^{err})_{(2,3)} & \dots & (a_i^{err})_{(2,c)} \\ (a_i^{err})_{(3,1)} & (a_i^{err})_{(3,2)} & (a_i^{err})_{(3,3)} & \dots & (a_i^{err})_{(3,c)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_i^{err})_{(r,1)} & (a_i^{err})_{(r,2)} & (a_i^{err})_{(r,3)} & \dots & (a_i^{err})_{(r,c)} \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

où r est l'indice de la ligne, c est l'indice de la colonne, l est le nombre de fréquences réduites k et $e(s)$ est l'erreur calculée par l'équation (5.3). Nous devons ensuite trouver les valeurs des éléments de matrices de l'erreur $(a_0^{err})_{(r,c)}$, $(a_1^{err})_{(r,c)}$, $(a_2^{err})_{(r,c)}$, $(a_3^{err})_{(r,c)}$, ... par la minimisation de $J_{(r,c)}$ qui se réalise en posant à zéro les dérivées partielles de $J_{(r,c)}$ par rapport à chaque matrice inconnue.

Plus précisément, nous devons calculer $\frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_i^{err}} = 0$ où A_i^{err} sont des matrices inconnues,

$i = 1, \dots, n+2$. Les dérivées partielles de $J_{r,c}$ par rapport à chaque élément des matrices inconnues s'écrivent sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_0^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_1^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l s_j \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_2^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l s_j^2 \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_3^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_4^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0 \\
\frac{\partial J_{r,c}}{\partial (a_{i+2}^{err})_{r,c}} = (-2) * \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} \left[e_{r,c} - \left((a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right) \right] = 0
\end{array} \right. \quad (5.12)$$

Les équations (5.12) s'écrivent de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_{j=1}^l e_{r,c} = \sum_{j=1}^l \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right] \\
\sum_{j=1}^l s_j * e_{r,c} = \sum_{j=1}^l s_j \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right] \\
\sum_{j=1}^l s_j^2 * e_{r,c} = \sum_{j=1}^l s_j^2 \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right] \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} * e_{r,c} = \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right] \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} * e_{r,c} = \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right] \\
\ldots \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} * e_{r,c} = \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} \left[(a_0^{err})_{r,c} + (a_1^{err})_{r,c} s_j + (a_2^{err})_{r,c} s_j^2 + \sum_{i=1}^n \frac{(a_{i+2}^{err})_{r,c}}{s_j + b_i} s_j \right]
\end{array} \right. \quad (5.13)$$

d'où nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_{j=1}^l e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l 1 + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^2 + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} \right] \\
\sum_{j=1}^l s_j e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^2 + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^3 + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_i} \right] \\
\sum_{j=1}^l s_j^2 e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^2 + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^3 + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l s_j^4 + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_i} \right] \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_1} + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_1} + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{(s_j + b_i)(s_j + b_1)} \right] \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_2} + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_2} + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{(s_j + b_i)(s_j + b_2)} \right] \\
\ldots \\
\sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} e_{r,c} = (a_0^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_i} + (a_1^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_i} + (a_2^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_i} + \sum_{i=1}^n \left[(a_{i+2}^{err})_{r,c} \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{(s_j + b_i)(s_j + b_i)} \right]
\end{array} \right. \quad (5.14)$$

Le système d'équations (5.14) peut s'écrire ensuite sous la forme suivante :

$$b = A x \quad (5.15)$$

où :

$$x = \left[A_0^{err} \quad A_1^{err} \quad A_2^{err} \quad A_3^{err} \quad A_4^{err} \quad \dots \quad A_{n+2}^{err} \right]^T \quad (5.15.1)$$

$$b = \left[\sum_{j=1}^l e \quad \sum_{j=1}^l s_j e \quad \sum_{j=1}^l s_j^2 e \quad \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} e \quad \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} e \quad \dots \quad \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_n} e \right]^T \quad (5.15.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^l 1 & \sum_{j=1}^l s_j & \sum_{j=1}^l s_j^2 & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_n} \\ \sum_{j=1}^l s_j & \sum_{j=1}^l s_j^2 & \sum_{j=1}^l s_j^3 & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_2} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_n} \\ \sum_{j=1}^l s_j^2 & \sum_{j=1}^l s_j^3 & \sum_{j=1}^l s_j^4 & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_2} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_n} \\ \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_1} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_1)(s_j + b_1)} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_2)(s_j + b_1)} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_n)(s_j + b_1)} \\ \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_2} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_2} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_2} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_1)(s_j + b_2)} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_2)(s_j + b_2)} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_n)(s_j + b_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{s_j + b_n} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^2}{s_j + b_n} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j^3}{s_j + b_n} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_1)(s_j + b_n)} & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_2)(s_j + b_n)} & \dots & \sum_{j=1}^l \frac{s_j}{(s_j + b_n)(s_j + b_n)} \end{bmatrix} \quad (5.15.3)$$

La solution x du système d'équations (5.15) est donnée par l'équation suivante :

$$x = A^{-1} b \quad (5.16)$$

Nous remplaçons $e(s)$ par $e_{analytique}(s)$ donnée par l'équation (5.9) et $Q_{LS}(s)$ donnée par l'équation (5.8) dans l'équation (5.1) et nous obtenons l'équation suivante :

$$Q_{CLS}(s) = (A_0^{LS} + A_0^{err}) + (A_1^{LS} + A_1^{err})s + (A_2^{LS} + A_2^{err})s^2 + \sum_{i=1}^n (A_{i+2}^{LS} + A_{i+2}^{err}) \frac{s}{s + b_i^{LS}} \quad (5.17)$$

L'équation (5.17) peut être réécrite sous la forme suivante semblable à la forme des forces aérodynamiques approximées par la méthode LS :

$$\overline{Q_{CLS}}(s) = A_0^{CLS} + A_1^{CLS}s + A_2^{CLS}s^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{CLS}}{s + b_i} s \quad (5.18)$$

et par l'identification des termes de l'équation (5.18) avec ceux de l'équation (5.17), nous obtenons :

$$A_0^{CLS} = A_0^{LS} + A_0^{err}, A_1^{CLS} = A_1^{LS} + A_1^{err}, A_2^{CLS} = A_2^{LS} + A_2^{err}, \dots, A_{n+2}^{CLS} = A_{n+2}^{LS} + A_{n+2}^{err} \quad (5.19)$$

5.3 L'introduction des forces aérodynamiques dans le système

L'équation (5.18) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* peut s'écrire, en utilisant l'expression de la variable de Laplace $s = jk$, sous la forme suivante:

$$\hat{Q} = A_0 + A_1(jk) + A_2(jk)^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2} \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \quad (5.20)$$

où les notations suivantes sont utilisées pour les termes de l'équation (5.19) qui sont égaux avec les termes de l'équation (5.20):

$$\hat{Q} = Q_{CLS}, A_0 = A_0^{CLS}, A_1 = A_1^{CLS}, A_2 = A_2^{CLS}, \dots, A_{n+2} = A_{n+2}^{CLS}.$$

Nous supposons que tous les termes A_{i+2} peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'une partie réelle et imaginaire : $A_{i+2} = A_{i+2}^R + jA_{i+2}^I$, où $A_{i+2}^I \ll A_{i+2}^R$ alors nous obtenons :

$$\hat{Q} = [A_0^R + jA_0^I] + [A_1^R + jA_1^I](jk) + [A_2^R + jA_2^I](jk)^2 + \sum_{i=1}^n [A_{i+2}^R + jA_{i+2}^I] \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \quad (5.21)$$

L'équation (5.21) peut être réécrite sous la forme équivalente suivante :

$$\hat{Q} = \left[A_0^R + A_1^R(jk) + A_2^R(jk)^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^R \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] + j \left[A_0^I + A_1^I(jk) + A_2^I(jk)^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^I \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] \quad (5.22)$$

Dans notre cas, on supposera que le terme $A_2^I(jk)^2$ est négligeable, car premièrement il est très petit par rapport à A_2^R , et deuxièmement ce terme est multiplié par un autre terme contenant k^2 , ainsi pour des valeurs de fréquences réduites k très proches ou inférieures à

1.0, k^2 devient plus petit, ce qui rend finalement le terme $A_2^I(jk^2)$ négligeable. Nous allons obtenir :

$$\hat{Q} = \left[A_0^R + A_1^R(jk) + A_2^R(jk)^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^R \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] + j \left[A_0^I + A_1^I(jk) + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^I \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] \quad (5.23)$$

Nous avons également observé que l'équation générale (3.15) qui nous permet d'étudier la stabilité d'un avion s'écrit comme suit :

$$M \frac{d^2 q_n}{dt^2} + B \frac{dq_n}{dt} + K q_n = \hat{Q} \quad (5.24)$$

Nous remplaçons les forces aérodynamiques \hat{Q} données par l'équation (5.23) dans l'équation (5.24) et nous obtenons:

$$\begin{aligned} M\ddot{q}_n + B\dot{q}_n + Kq_n = & q_{dyn} \left[A_0^R + A_1^R(jk) + A_2^R(jk)^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^R \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] q_n \\ & + j q_{dyn} \left[A_0^I + A_1^I(jk) + \sum_{i=1}^n A_{i+2}^I \frac{(jk)}{(jk) + b_i} \right] q_n \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nous définissons la fréquence réduite $k = \frac{\omega b}{V}$ et la variable de Laplace $s = j\omega$, alors nous obtenons:

$$jk = \frac{b}{V} s \quad (5.26)$$

D'après l'inégalité $A_{n+2}^I \ll A_{n+2}^R$, et dû au fait que les valeurs des parties imaginaires des coefficients A_{n+2} sont très petites (car elles seront calculées à partir des termes d'erreurs), et ce pour toutes les fréquences réduites strictement supérieures à zéro, nous pourrons ainsi remplacer l'équation (5.26) dans (5.25), et nous obtenons dans le domaine de Laplace:

$$\begin{aligned}
Ms^2q_n + Bs q_n + Kq_n = q_{dyn} & \left[A_0^R + A_1^R \left(\frac{b}{V} s \right) + A_2^R \left(\frac{b}{V} s \right)^2 + \sum_n A_{n+2}^R \frac{\left(\frac{b}{V} s \right)}{\left(\frac{b}{V} s \right) + b_n} \right] q_n \\
& + q_{dyn} \left[A_0^I + A_1^I \left(\frac{b}{V} s \right) + \sum_n A_{n+2}^I \frac{\left(\frac{b}{V} s \right)}{\left(\frac{b}{V} s \right) + b_n} \right] s q_n
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Nous réarrangeons les équations (5.28) et (5.29) et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
& \left[M - q_{dyn} A_2^R \left(\frac{b}{V} \right)^2 - q_{dyn} A_1^I \frac{b}{V} \right] s^2 q_n + \left(B - q_{dyn} A_1^R \frac{b}{V} - q_{dyn} A_0^I \right) s q_n + (K - q_{dyn} A_0^R) q_n = \\
& q_{dyn} \left[\sum_n \left(A_{n+2}^R \frac{\frac{b}{V} s}{\frac{b}{V} s + b_n} + A_{n+2}^I \frac{\frac{b}{V} s^2}{\frac{b}{V} s + b_n} \right) \right] q_n = q_{dyn} \left[\sum_n \left(A_{n+2}^R \frac{s}{s + \frac{b}{V} b_n} + A_{n+2}^I \frac{s^2}{s + \frac{b}{V} b_n} \right) \right] q_n = \\
& q_{dyn} \sum_n \left[A_{n+2}^R \frac{s}{s + \frac{b}{V} b_n} + A_{n+2}^I \left(s - \frac{\frac{b}{V} b_n s}{s + \frac{b}{V} b_n} \right) \right] q_n = \\
& q_{dyn} \sum_n \left[A_{n+2}^R \frac{s}{s + \frac{b}{V} b_n} - A_{n+2}^I \left(\frac{V}{b} b_n \right) \left(\frac{s}{s + \frac{b}{V} b_n} \right) \right] q_n + q_{dyn} \sum_n [A_{n+2}^I] s q_n
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
& \left[M - q_{dyn} A_2^R \left(\frac{b}{V} \right)^2 - q_{dyn} A_1^I \frac{b}{V} \right] s^2 + \left[B - q_{dyn} A_1^R \frac{b}{V} - q_{dyn} A_0^I - q_{dyn} \sum_n A_{n+2}^I \right] s + (K - q_{dyn} A_0^R) = \\
& q_{dyn} \sum_n \left\{ \left[A_{n+2}^R - A_{n+2}^I \left(\frac{V}{b} b_n \right) \right] \frac{s}{s + \frac{b}{V} b_n} \right\}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Afin de représenter nos équations sous forme d'espace d'état, nous définissons la nouvelle variable d'état X_i :

$$X_i = \frac{s}{s + \frac{b}{V}} q_n \quad (5.30)$$

$$\text{et nous obtenons : } \dot{X}_i + \frac{V}{b} b_i X_i = \dot{q}_n \quad (5.31)$$

Nous remplaçons les équations (5.30) et (5.31) dans l'équation (5.29) qui devient :

$$\begin{aligned} & \left[M - q_{dyn} A_2^R \left(\frac{b}{V} \right)^2 - q_{dyn} A_1^I \frac{b}{V} \right] \ddot{q}_n + \left[B - q_{dyn} A_1^R \frac{b}{V} - q_{dyn} A_0^I - q_{dyn} \sum_n A_{n+2}^I \right] \dot{q}_n \\ & + (K - q_{dyn} A_0^R) q_n = q_{dyn} \sum_n \left[\left(A_{n+2}^R - A_{n+2}^I \frac{V}{b} b_n \right) X_n \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

L'équation (5.32) s'écrit sous la forme suivante:

$$\hat{M} \ddot{q}_n + \hat{D} \dot{q}_n + \hat{K} q_n + q_{dyn} \sum_n \hat{A}_{n+2} X_n = 0 \quad (5.33)$$

où :

$$\hat{M} = M - q_{dyn} A_2^R \left(\frac{b}{V} \right)^2 - q_{dyn} A_1^I \frac{b}{V}$$

$$\hat{D} = B - q_{dyn} A_1^R \frac{b}{V} - q_{dyn} A_0^I - q_{dyn} \sum_n A_{n+2}^I$$

$$\hat{K} = K - q_{dyn} A_0^R$$

$$\hat{A}_{n+2} = -A_{n+2}^R + A_{n+2}^I \left(\frac{V}{b} b_n \right)$$

Les équations (5.30) et (5.33) sont utilisées pour écrire le système d'équations de la dynamique de l'avion sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{M} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \\ \dot{X}_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ -\hat{K} & -\hat{D} & -q_{dyn}\hat{A}_3 & \cdots & -q_{dyn}\hat{A}_{n+2} \\ 0 & I & -\frac{V}{b}b_1I & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -\frac{V}{b}b_nI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Le système d'équations (5.34) sera utilisé dans les programmes sur ordinateur pour l'estimation du battement.

5.4 Présentation de la méthode CMS

Les forces aérodynamiques approximées par la méthode MS ont la forme suivante :

$$Q_{MS}(s) = A_0 + A_1s + A_2s^2 + D(sI - R)^{-1}Es \quad (5.35)$$

Nous définissons l'erreur *Err* (appelé la nouvelle erreur) par l'équation (5.36). Cette erreur est la différence entre les forces aérodynamiques $Q_{données}(k)$ calculées par les méthodes de doublet *DLM* (en régime subsonique) et de pressions *CPM* (en régime supersonique) et leurs approximations par la méthode *MS* dénotées par $Q_{MS}(s)$ et calculées par l'équation (5.35).

$$Err = Q_{données}(k) - Q_{MS}(s) \quad (5.36)$$

L'erreur est approximée sous la même forme analytique que celle utilisée pour la matrice $Q_{MS}(s)$:

$$Err = A_{0err} + A_{1err}s + A_{2err}s^2 + D(sI - R)^{-1}E_{err}s \quad (5.37)$$

Nous considérons, pour simplifier les calculs et la démonstration de la méthode *CMS* (Voir l'annexe 2), que les matrices D et R définies dans l'équation (5.37) ont les mêmes valeurs que les matrices calculées par la méthode *MS* et définies dans l'équation (5.35). Pour cette raison, nous gardons dans les deux équations (5.35) et (5.37) les mêmes matrices D et R . L'erreur quadratique $J_{r,c}$ est définie comme suit :

$$J_{r,c} = \sum_{i=1}^l \left[(Err_i)_{r,c} - (A_{0err})_{r,c} - (A_{1err})_{r,c} s_i - (A_{2err})_{r,c} s_i^2 - [D(s_i I - R)E_{err}]_{r,c} s_i \right]^2 \quad (5.38)$$

où l représente le nombre de fréquences réduites k . La matrice E_{err} est supposé avoir la forme suivante : $E_{err} = E_{MS} E_{err}^*$. Autrement dit, nous avons supposé que la matrice E_{err} n'est que la matrice E_{MS} calculée par la méthode *MS* multipliée par une autre matrice erreur dénotée E_{err}^* .

Pour trouver la valeur optimale de J , il faut poser à zéro toutes ces dérivées partielles par rapport aux matrices inconnues A_{0err} , A_{1err} , A_{2err} et E_{err}^* , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{0err}} = \frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{1err}} = \frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{2err}} = \frac{\partial J_{r,c}}{\partial E_{err}^*} = 0 \quad (5.39.1)$$

Nous obtenons le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{0err}} = (-2) \sum_{i=1}^l [Err_i - A_{0err} - A_{1err} s_i - A_{2err} s_i^2 - D(s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} E_{err}^*] = 0 \\ \frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{1err}} = (-2) \sum_{i=1}^l [Err_i s_i - A_{0err} s_i - A_{1err} s_i^2 - A_{2err} s_i^3 - D(s_i I - R)^{-1} s_i^2 E_{MS} E_{err}^*] = 0 \\ \frac{\partial J_{r,c}}{\partial A_{2err}} = (-2) \sum_{i=1}^l [Err_i s_i^2 - A_{0err} s_i^2 - A_{1err} s_i^3 - A_{2err} s_i^4 - D(s_i I - R)^{-1} s_i^3 E_{MS} E_{err}^*] = 0 \\ \frac{\partial J_{r,c}}{\partial E_{err}^*} = (-2) \sum_{i=1}^l [D(s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} Err_i - D(s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} A_{0err} - D(s_i I - R)^{-1} s_i^2 E_{MS} A_{1err} \\ - [D(s_i I - R)^{-1} s_i^3 E_{MS} A_{2err} - (D(s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS})^2 E_{err}^*] = 0 \end{array} \right. \quad (5.39.2)$$

Étant donné que les matrices inconnues A_{0err} , A_{1err} , A_{2err} et E_{err}^* ne dépendent pas de la fréquence réduite k , nous pouvons écrire le système d'équations (5.39.2) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l Err_i = A_{0err} \sum_{i=1}^l 1 + A_{1err} \sum_{i=1}^l s_i + A_{2err} \sum_{i=1}^l s_i^2 + D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i] E_{MS} E_{err}^* \\ \sum_{i=1}^l Err_i s_i = A_{0err} \sum_{i=1}^l s_i + A_{1err} \sum_{i=1}^l s_i^2 + A_{2err} \sum_{i=1}^l s_i^3 + D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i^2] E_{MS} E_{err}^* \\ \sum_{i=1}^l Err_i s_i^2 = A_{0err} \sum_{i=1}^l s_i^2 + A_{1err} \sum_{i=1}^l s_i^3 + A_{2err} \sum_{i=1}^l s_i^4 + D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i^3] E_{MS} E_{err}^* \\ D \sum_{i=1}^l (s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} Err_i = D \sum_{i=1}^l (s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} A_{0err} + D \sum_{i=1}^l (s_i I - R)^{-1} s_i^2 E_{MS} A_{1err} \\ + D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i^3] E_{MS} A_{2err} - \left[D \sum_{i=1}^l (s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} \right]^2 E_{err}^* \end{array} \right. \quad (5.40)$$

Nous remarquons que le système d'équations (5.40) peut s'écrire sous la forme matricielle $B = A x$. La solution x du système est donnée par l'équation (5.41) :

$$x = A^{-1} B \quad (5.41)$$

où :

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l Err_i & \sum_{i=1}^l Err_i s_i & \sum_{i=1}^l Err_i s_i^2 & D \sum_{i=1}^l (s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS} Err_i \end{bmatrix}^T \quad (5.42)$$

$$x = \begin{bmatrix} A_{0err} & A_{0err} & A_{0err} & E_{err}^* \end{bmatrix}^T \quad (5.43)$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l 1 & \sum_{i=1}^l s_i & \sum_{i=1}^l s_i^2 & D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i] E_{MS} \\ \sum_{i=1}^l s_i & \sum_{i=1}^l s_i^2 & \sum_{i=1}^l s_i^3 & D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i^2] E_{MS} \\ \sum_{i=1}^l s_i^2 & \sum_{i=1}^l s_i^3 & \sum_{i=1}^l s_i^4 & D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i^3] E_{MS} \\ D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i] E_{MS} & \dots & \dots & D \sum_{i=1}^l [(s_i I - R)^{-1} s_i E_{MS}]^2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Une fois que les coefficients de l'erreur aient été calculés, la nouvelle matrice $Q_{CMS}(s)$ est calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Q_{CMS}(s) &= A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + D(sI - R)^{-1} Es + Err = \\ &= A_0 + A_{0err} + (A_1 + A_{1err})s + (A_2 + A_{2err})s^2 + D(sI - R)^{-1} (E_{MS} + E_{MS} E_{err}^*) s \\ &= A_0 + A_{0err} + (A_1 + A_{1err})s + (A_2 + A_{2err})s^2 + D(sI - R)^{-1} E_{MS} (I + E_{err}^*) s \end{aligned} \quad (5.45)$$

La matrice $Q_{CMS}(s)$ est représentée dans l'équation (5.45). L'algorithme de la méthode pk est utilisé pour l'analyse des vitesses et fréquences de battement pour les avions F/A-18 et CL-604.

5.5 Introduction des forces aérodynamiques dans le système

Les forces aérodynamiques approximées par la méthode CMS sont introduites dans l'équation générale (3.15) de la même façon que dans la section d'introduction dans le système des forces aérodynamiques calculées par la CLS . Suite à des manipulations algébriques, l'équation générale de la dynamique d'un système aéroélastique devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_n \\ \ddot{q}_n \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -[M + q_{dyn}A_2]^{-1}[K + q_{dyn}A_0] & -[M + q_{dyn}A_2]^{-1}[D + q_{dyn}A_1] & -[M + q_{dyn}A_2]^{-1}q_{dyn}D \\ 0 & E & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ \dot{q}_n \\ X_n \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

5.6 Présentation de la méthode *MxState*

Dans cette section, nous présentons une nouvelle formulation qui réside sur la combinaison des formes standard des approximations des forces aérodynamiques par les méthodes *LS* et *MS* (Voir l'annexe 3). La forme générale de ces forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace approximées avec la nouvelle méthode abrégée en tant que *MxState* est donnée par l'équation (5.47) :

$$Q_{MxState}(s) = A_0 + A_1s + A_2s^2 + \sum_{i=1}^l \frac{A_{i+2}}{s + b_i}s + D[sI - R]^{-1}Es \quad (5.47)$$

où $Q_{MxState}(s)$ est un ensemble des forces aérodynamiques approximées par la méthode *MxState* en fonction de la variable de Laplace s , l est le nombre de termes de retard, A_i est un ensemble de matrices de dimensions $(r \times c)$, b_i est un ensemble de termes de retard, D est une matrice de dimension $(r \times l)$, R est une matrice de dimension $(l \times l)$ et E est une matrice de dimension $(l \times c)$.

Nous remarquons le quatrième et le cinquième terme $\sum_{i=1}^l \frac{A_{i+2}}{s + b_i}s$ et $D[sI - R]^{-1}Es$

situés à la droite de l'équation (5.47). La forme du quatrième terme correspond au dernier terme de l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode *LS* pendant que la forme du cinquième terme correspond au dernier terme de l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode *MS*.

Pour démontrer le raisonnement pris en considération dans la méthode *MxState*, le terme considéré dans la méthode *MS* est écrit sous la même forme que le terme considéré dans

la méthode LS , autrement dit, nous représentons le terme $D[sI - R]^{-1}Es$ sous la forme $\sum_{i=1}^l \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s$. Ce type de représentation est montré dans le prochain exemple.

Les matrices D de dimensions $(3 * 2)$, R de dimensions $(2 * 2)$ et E de dimensions $(2 * 3)$ peuvent être représentées sous les formes analytiques suivantes :

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [sI - R]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s + b_2)} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix}$$

où I est la matrice identité. Nous remplaçons les matrices D , R et E exprimées par les équations (7.2) dans le produit $D[sI - R]^{-1}Es$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned} D[sI - R]^{-1}Es &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s + b_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} s = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & 0 \\ d_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s + b_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & d_{22} \\ 0 & d_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s + b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s + b_2)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} s = \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$= \left\{ \frac{1}{(s + b_1)} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & 0 \\ d_{31} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s + b_2)} \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & d_{22} \\ 0 & d_{32} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} s =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(s+b_1)} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & 0 \\ d_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} s + \frac{1}{(s+b_2)} \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & d_{22} \\ 0 & d_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \end{bmatrix} s = \\
&= \frac{1}{(s+b_1)} \begin{bmatrix} d_{11} e_{11} & d_{11} e_{12} & d_{11} e_{13} \\ d_{21} e_{11} & d_{21} e_{12} & d_{21} e_{13} \\ d_{31} e_{11} & d_{31} e_{12} & d_{31} e_{13} \end{bmatrix} s + \frac{1}{(s+b_2)} \begin{bmatrix} d_{12} e_{21} & d_{12} e_{22} & d_{12} e_{23} \\ d_{22} e_{21} & d_{22} e_{22} & d_{22} e_{23} \\ d_{32} e_{21} & d_{32} e_{22} & d_{32} e_{23} \end{bmatrix} s. \quad (5.50)
\end{aligned}$$

La somme exprimée par le terme de droite de l'équation (5.50) peut s'écrire sous la

forme $\sum_{i=1}^2 \frac{A_{i+2}}{s+b_i} s$.

$$\text{où : } A_3 = \begin{bmatrix} d_{11} e_{11} & d_{11} e_{12} & d_{11} e_{13} \\ d_{21} e_{11} & d_{21} e_{12} & d_{21} e_{13} \\ d_{31} e_{11} & d_{31} e_{12} & d_{31} e_{13} \end{bmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{bmatrix} d_{12} e_{21} & d_{12} e_{22} & d_{12} e_{23} \\ d_{22} e_{21} & d_{22} e_{22} & d_{22} e_{23} \\ d_{32} e_{21} & d_{32} e_{22} & d_{32} e_{23} \end{bmatrix}.$$

Nous remplaçons les équations (5.50) dans l'équation (5.47), et nous obtenons l'équation (5.51) :

$$Q_{MxState}(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_{i=1}^{l_{LS}+l_{MS}} \frac{A_{i+2}}{s+b_i} s \quad (5.51)$$

Dans la méthode *MxState*, les valeurs des matrices $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ sont trouvées premièrement par la méthode d'approximation des forces aérodynamiques *LS*. Dans le but de simplifier la présentation de la méthode *MxState*, nous supposons que les valeurs et le nombre des termes de retard considérées dans la méthode *LS* sont égales aux valeurs et aux nombres des termes de retard considérées dans la méthode *MS*, c'est-à-dire $b_{iLS} = b_{iMS}$ et $l_{LS} = l_{MS}$. Suite à cette hypothèse, le dernier terme de l'équation (5.51) qui est le terme de gauche de l'équation (5.52) est égal au terme de droite de l'équation

(5.52) à cause de leurs dénominateurs communs (car la somme des termes est réalisée uniquement au numérateur).

$$\sum_{n=1}^{n=n_{LS}+n_{MS}} \frac{A_{n+2}}{s+b_n} s = \sum_{n=1}^{n=n_{LS}} \frac{A_{n+2}}{s+b_n} s \quad (5.52)$$

Cette dernière identité peut être illustrée par le prochain exemple numérique où seulement deux termes de retard sont considérés $l_{LS} = l_{MS} = 2$:

$$\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right) + \left(\frac{3}{s+1} + \frac{4}{s+2} \right) = \left(\frac{1+3}{s+1} + \frac{2+4}{s+2} \right) = \left(\frac{4}{s+1} + \frac{6}{s+2} \right) \quad (5.53)$$

Une fois que les valeurs des matrices $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ sont trouvées, il faut utiliser les équations (5.49) et (5.50) pour calculer le produit matriciel présent dans le dernier terme de l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode MS , qui est alors donné par $D[sI - R]^{-1} E s$, autrement dit, nous voulons passer de l'équation (5.52) à l'équation (5.47).

Dans le but d'illustrer ce passage, nous montrons un exemple à partir de deux matrices connues A_3 et A_4 :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

où les termes de retard correspondants sont $b_1 = 2$ et $b_2 = 3$, voir l'équation (5.53).

Nous écrivons les matrices A_3 et A_4 de telle sorte à ce que les éléments sur les deuxièmes et troisièmes lignes soient écrits en tant que sommes des multiples des éléments situés

sur la première ligne avec des coefficients libres calculés pour obtenir les éléments sur les deux dernières lignes 2 et 3.

Nous choisissons les plus simples multiples [1, 2, 3] correspondants aux premières, deuxièmes et troisièmes lignes, pour les matrices A_3 et A_4 , dans les équations (5.55) et (5.56) :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*(1) & -2*(1) & 0*(1) \\ 3*(2)-2 & -2*(2)+10 & 0*(2)+1 \\ 3*(3)-14 & -2*(3)+5 & 0*(3)+9 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5*(1) & 2*(1) & 3*(1) \\ -5*(2)+17 & 2*(2)-3 & 3*(2)-10 \\ -5*(3)+16 & 2*(3)-5 & 3*(3)-7 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Les matrices A_3 et A_4 sont écrites sous les formes des sommes de matrices dans lesquelles le premier terme s'exprime comme un produit de deux matrices (la première matrice a les éléments nuls sur la deuxième colonne et la deuxième matrice du produit a les éléments nuls sur la deuxième ligne) et le deuxième terme a les éléments nuls sur la première ligne, voir les équations suivantes (5.57) et (5.58).

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3*1 & -2*1 & 0*1 \\ 3*2 & -2*2 & 0*2 \\ 3*3 & -2*3 & 0*3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -5*1 & 2*1 & 3*1 \\ -5*2 & 2*2 & 3*2 \\ -5*3 & 2*3 & 3*3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Le premier terme de la matrice A_4 est exprimé par un produit de deux matrices. Les éléments situés sur la première colonne de la première matrice du produit sont déplacés sur la deuxième colonne de la même matrice et les éléments sur la deuxième ligne sont déplacés sur la première ligne de la deuxième matrice du produit, alors l'équation (5.58) est réécrite pour A_4 :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Nous utilisons ensuite deux termes de retard $b_1 = 2$ et $b_2 = 3$ et nous obtenons la somme suivante :

$$\frac{1}{s+2} A_3 + \frac{1}{s+3} A_4 = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Nous remplaçons A_3 et A_4 données par les équations (5.57) et (5.59) dans l'équation (5.60) et nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{s+2} A_3 + \frac{1}{s+3} A_4 = \frac{1}{s+2} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right] + \frac{1}{s+3} \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix} \right] \quad (5.61)$$

Nous appliquons un artifice numérique à l'équation (5.61) dans le but d'obtenir la même matrice comme facteur commun. Cet artifice est rendu possible car nous travaillons avec des lignes et colonnes nulles :

$$\frac{1}{s+2} A_3 + \frac{1}{s+3} A_4 = \frac{1}{s+2} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right] + \quad (5.62)$$

$$+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

Nous réarrangeons l'équation (5.62) pour obtenir l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+2}A_3+\frac{1}{s+3}A_4 &= \left[\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

L'équation (5.63) est réarrangée et finalement écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-2}A_3+\frac{1}{s-3}A_4 &= \frac{1}{s-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} + \frac{1}{s-3}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}}_{sI-R} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_E + \underbrace{\frac{1}{s-2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{A_3} + \underbrace{\frac{1}{s-3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix}}_{A_4} \end{aligned} \quad (5.64)$$

où les termes de retard sont $b_1 = 2$ et $b_2 = 3$ et les matrices D , R , E , A_3 et A_4 sont :

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ -14 & 5 & 9 \end{bmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -3 & -10 \\ 16 & -5 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

5.7 Remarques

La matrice D exprimée dans les équations (5.65) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Chaque ligne de la matrice E correspond à la première ligne de la matrice A_i de départ, ce qui peut être représenté sur le schéma suivant dans lequel les termes de la première ligne de la matrice E correspondent aux termes de la première ligne de A_3 et les éléments de la deuxième ligne de E correspondent aux termes de la première ligne de A_4 .

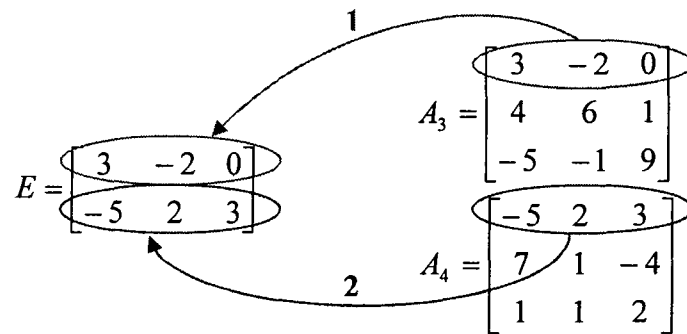


Figure 11 Correspondance entre les éléments des lignes de la matrice E et les éléments des premières lignes des matrices A_3 et A_4

Nous pouvons écrire l'équation liant l'ancienne formulation avec la nouvelle formulation et nous obtenons :

$$\frac{A_3}{s + b_1} + \frac{A_4}{s + b_2} = \frac{A_3}{s + b_1} + \frac{A_4}{s + b_2} + D[sI - R]^{-1} E \quad (5.67)$$

où

$$D[sI - R]^{-1} E = \begin{bmatrix} d_1 \left[\frac{e_{11}}{s+b_1} + \frac{e_{21}}{s+b_2} \right] & d_1 \left[\frac{e_{11}}{s+b_1} + \frac{e_{21}}{s+b_2} \right] & d_1 \left[\frac{e_{11}}{s+b_1} + \frac{e_{21}}{s+b_2} \right] \\ d_2 \left[\frac{e_{11}}{s+b_1} + \frac{e_{21}}{s+b_2} \right] & d_2 \left[\frac{e_{12}}{s+b_1} + \frac{e_{22}}{s+b_2} \right] & d_2 \left[\frac{e_{13}}{s+b_1} + \frac{e_{23}}{s+b_2} \right] \\ d_3 \left[\frac{e_{11}}{s+b_1} + \frac{e_{21}}{s+b_2} \right] & d_3 \left[\frac{e_{12}}{s+b_1} + \frac{e_{22}}{s+b_2} \right] & d_3 \left[\frac{e_{13}}{s+b_1} + \frac{e_{23}}{s+b_2} \right] \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Nous représentons ensuite les matrices A_3 et A_4 sous des formes analytiques où les éléments ont des exposants 3 et 4 correspondant aux indices des matrices A_3 et A_4 , respectivement.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 \\ a_{21}^3 & a_{22}^3 & a_{23}^3 \\ a_{31}^3 & a_{32}^3 & a_{33}^3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 \\ a_{21}^4 & a_{22}^4 & a_{23}^4 \\ a_{31}^4 & a_{32}^4 & a_{33}^4 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Suite au remplacement des équations (5.68) et (5.69) dans l'équation (5.67), nous obtenons les nouvelles valeurs des matrices A_3 et A_4 utilisées dans notre nouvelle méthode *MxState* :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^3 - d_2 e_{11} & a_{22}^3 - d_2 e_{12} & a_{23}^3 - d_2 e_{13} \\ a_{31}^3 - d_3 e_{11} & a_{32}^3 - d_3 e_{12} & a_{33}^3 - d_3 e_{13} \end{bmatrix} \text{ et} \quad (5.70)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^4 - d_2 e_{11} & a_{22}^4 - d_2 e_{12} & a_{23}^4 - d_2 e_{13} \\ a_{31}^4 - d_3 e_{11} & a_{32}^4 - d_3 e_{12} & a_{33}^4 - d_3 e_{13} \end{bmatrix}$$

Suite à toutes ces manipulations matricielles, nous pouvons déduire qu'il est possible de passer de la formulation *LS* vers la formulation *MS* en supposant que le terme caractérisant la formulation de la méthode *LS* puisse avoir la forme suivante :

$$\sum_1^l \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s = \sum_1^l \frac{B_{i+2} C_{i+2}}{s + b_i} s \quad (5.71)$$

Dans ce cas, les modifications apportées à l'algorithme de la *LS* seront de fixer les valeurs des matrices B_{i+2} dans les fonctions de 'coût' et de calculer les matrices C_{i+2} . De cette façon, nous pouvons combiner les avantages de chaque méthode tels que la rapidité de calcul et l'introduction d'un nombre minimal d'états dans le système.

CHAPITRE 6

DESCRIPTION DES MODÈLES D'AVIONS

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons décrire brièvement les modèles d'avions F/A-18 et CL-604 utilisés dans cette thèse ainsi que les résultats obtenus par les deux compagnies suite à leurs analyses structurelles de ces avions. Ces résultats ont été obtenus sous la forme des modes et fréquences de battement.

6.2 Présentation générale du modèle d'avion F/A-18

Les données structurelles et aérodynamiques pour l'avion militaire à deux places F/A-18 nous ont été fournies par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center. Ce modèle d'avion est présenté dans la figure 12 (voir le site sur l'Internet www.dfrc.nasa.gov).

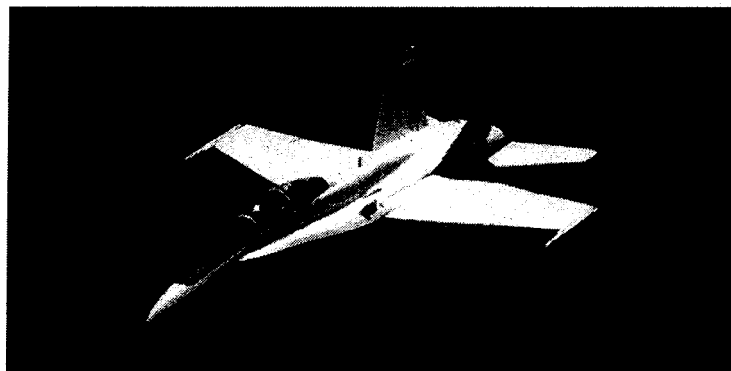


Figure 12 L'avion F/A-18 de la NASA (Vue d'en haut)

6.3 Modèle analytique de l'avion F/A-18

Suite à la modélisation par des éléments finis en STARS, aux laboratoires de la NASA DFRC, dans l'absence des forces aérodynamiques, donc au sol, un total de 43 modes de vibrations est calculé pour l'avion F/A-18 :

- 5 modes rigides (2 symétriques et 3 anti-symétriques)
- 28 modes élastiques (14 symétriques et 14 anti-symétriques)
- 10 modes de commande (5 symétriques et 5 anti-symétriques)

Les notations des modes et de leurs fréquences naturelles associées sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau I
Modes et fréquences de battement de l'avion F/A-18

Mode	Symmetric (Hz)	Anti-symmetric (Hz)
1 ^{ère} flexion de l'aile W1B	5,59	8,84
1 ^{ère} flexion de fuselage FUS1B	9,30	8,15
1 ^{ère} flexion de l'empennage S1B	13,21	12,98
1 ^{ère} torsion de l'aile W1T	13,98	14,85
1 ^{ère} flexion de l'empennage vertical VT1B	16,83	15,61
2 ^{ème} flexion de l'aile W2B	16,95	16,79
Torsion vers l'extérieur de l'aile WOBT	17,22	-
2 ^{ème} flexion du fuselage FUS2B	19,81	18,62
Rotation des volets au bord de fuite TEFR	23,70	23,47
Torsion de fuselage FUST	-	24,19
Mode latéral LRL	-	24,35
Mode en avant et en arrière du stabilisateur SFA	28,31	28,58
2 ^{ème} torsion de l'aile W2T	29,88	29,93
Rotation des ailerons AROT	33,44	-
Torsion de fuselage en arrière AFT	-	37,80
Torsion de l'aileron ATOR	38,60	-
Tangage de l'aile WPIT	-	39,18
3 ^{ème} flexion de l'aile W3B	43,17	-

Dans la figure 13, les positions des accéléromètres et des autres capteurs sont montrées pendant les essais au sol de l'avion F/A-18.

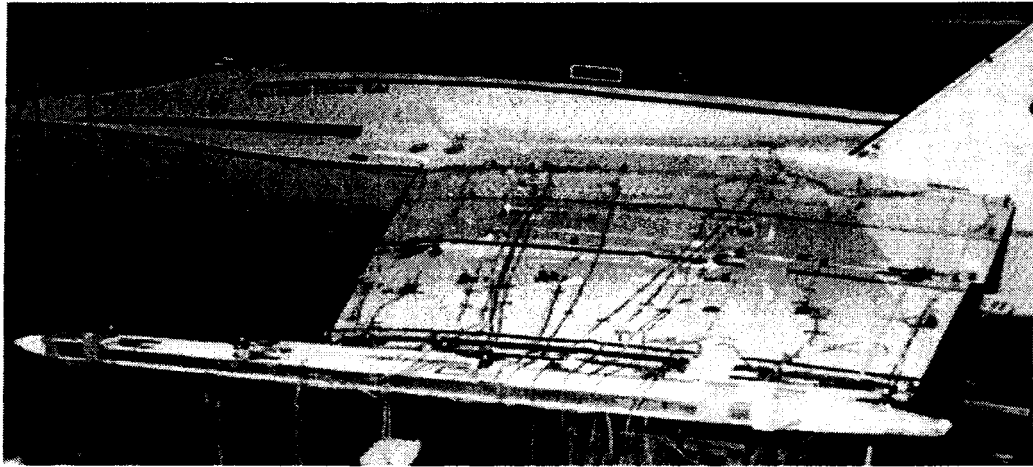


Figure 13 Essais au sol sur l'avion F/A-18

Les forces aérodynamiques non stationnaires sont calculées pour plusieurs nombres de Mach et fréquences réduites en régime subsonique par la méthode Doublet Lattice DLM et en régime supersonique par la méthode des pressions constantes CPM.

6.4 Présentation générale du modèle d'avion Challenger 604 (CL-604)

L'avion d'affaires CL-604 est conçu et construit par Bombardier Aéronautique. Cet avion a une taille et une capacité de transport de moyenne envergure, pouvant accueillir à son bord un nombre de 9 à 19 passagers ainsi que 3 membres de l'équipage. Les caractéristiques de cet avion sont :

- La portée maximale de 7,458 km au nombre de Mach $M = 0,74$ et 6,878 km au nombre de Mach $= 0,80$.
- La vitesse de croisière à haute vitesse, au nombre de Mach $M = 0,82$ (870 km/h).

- La vitesse de croisière à portée maximale, au nombre de Mach $M = 0,74$ (787 km/h).
- Longueur de 20,85 m, largeur de 19,61 mètres, surface des ailes de 45,71 m² et hauteur de 6,30 m.
- Altitude de vol maximale de 12,497 mètres (41,000 pieds).
- Altitude de croisière de 11,278 mètres (37,000 pieds).
- Temps de montée en altitude de croisière de 22 minutes.
- La distance à l'atterrissage est de 846 m.
- Le poids maximal au décollage est de 21,863 kg (48,200 livres).
- Le poids à l'atterrissage est de 17,237 kg (38,000 livres).
- Le poids sans combustible est de 14,515 kg (32,000 livres).
- Le poids maximal de référence est de 12,331 kg (27,185 livres).

L'avion est doté avec 2 moteurs turboréacteurs CF34-3B, produits par la compagnie General Electric, et ces moteurs développent une puissance de 38,84 kN au décollage et de 41,00 kN en vol.

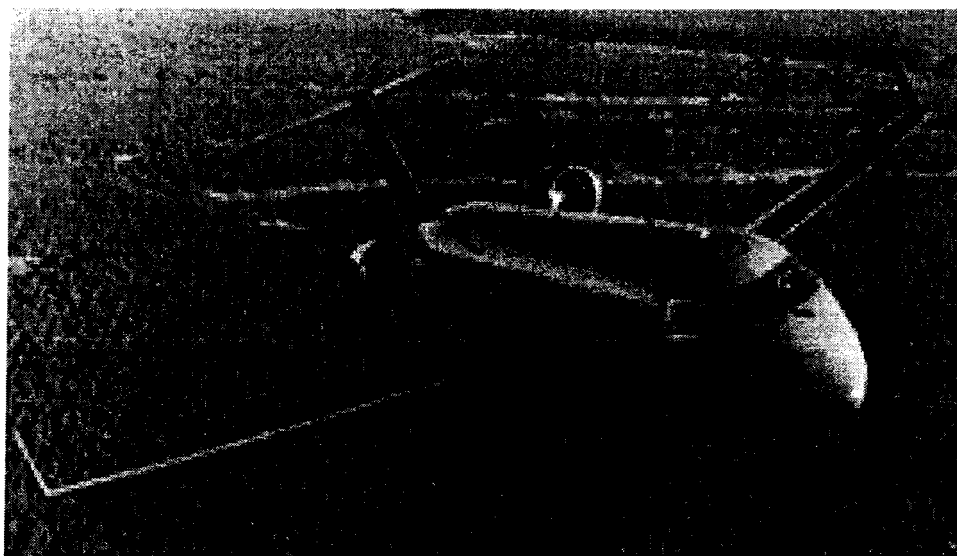


Figure 14 L'avion CL-604 de Bombardier Aéronautique (vue de face)

6.5 Modèle analytique de l'avion CL-604

Un modèle d'éléments finis du CL-604 a été utilisé pour calculer les caractéristiques modales de l'avion. Un total de cent modes de vibrations et fréquences a été fourni par les ingénieurs de la compagnie Bombardier Aéronautique.

La méthode des doublets (en anglais : Doublet Lattice Method DLM) a été utilisée en Nastran pour calculer les matrices des forces aérodynamiques non stationnaires Q pour le nombre de Mach $M = 0,88$ et 8 fréquences réduites $k = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1$ et 1.4 . Bombardier Aéronautique a identifié un total de 8 modes de battement pour le CL-604. Nous présentons dans le tableau suivant II les 8 modes de battement et leurs fréquences réduites associées.

Tableau II
Fréquences réduites correspondantes aux modes de battement
du modèle de l'avion CL-604

Modes de battements	Fréquences réduites [100 modes]	Fréquences réduites [94 modes]
Mode anti-symétrique de l'aile	0.245	0.231
Mode symétrique de l'empennage horizontal	1.415	1.416
Mode anti-symétrique de l'aile	0.282	0.271
Mode anti-symétrique de l'empennage horizontal	1.539	1.538
Mode de l'aile	0.161	0.161
1 ^{er} mode symétrique de l'aile	0.290	0.290
2 ^{ème} mode symétrique de l'aile	0.333	0.335
3 ^{ème} mode symétrique de l'aile	0.196	0.181

CHAPITRE 7

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

7.1 Résultats obtenus par la méthode *CLS* appliqué sur l'avion CL-604

La méthode standard d'approximation *LS* et la nouvelle méthode *CLS* sont appliquées sur l'avion d'affaires CL-604 pour le nombre de Mach $M = 0.88$ et huit fréquences réduites $k = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1$ et 1.4 .

Nous définissons le taux de réduction $= 100 * \text{abs}(Q_{LS} - Q_{CLS}) / Q_{LS}$ dans le but de comparer les résultats exprimés sous formes des forces aérodynamiques obtenus par la nouvelle méthode *CLS* par rapport à ceux obtenus par la méthode standard *LS*, où *abs* dénote la valeur absolue.

7.1.1 Présentation des approximations des forces aérodynamiques

La comparaison entre les parties réelles et imaginaires des deux éléments de forces aérodynamiques choisis aléatoirement $Q(35,15)$ et $Q(38,25)$ calculées par la méthode DLM (dénotee par 'Data') et leurs approximations par la méthode *LS* et la méthode *CLS*, est montrée pour deux nombres de termes de retard 1 et 4 sur la Figure 15.

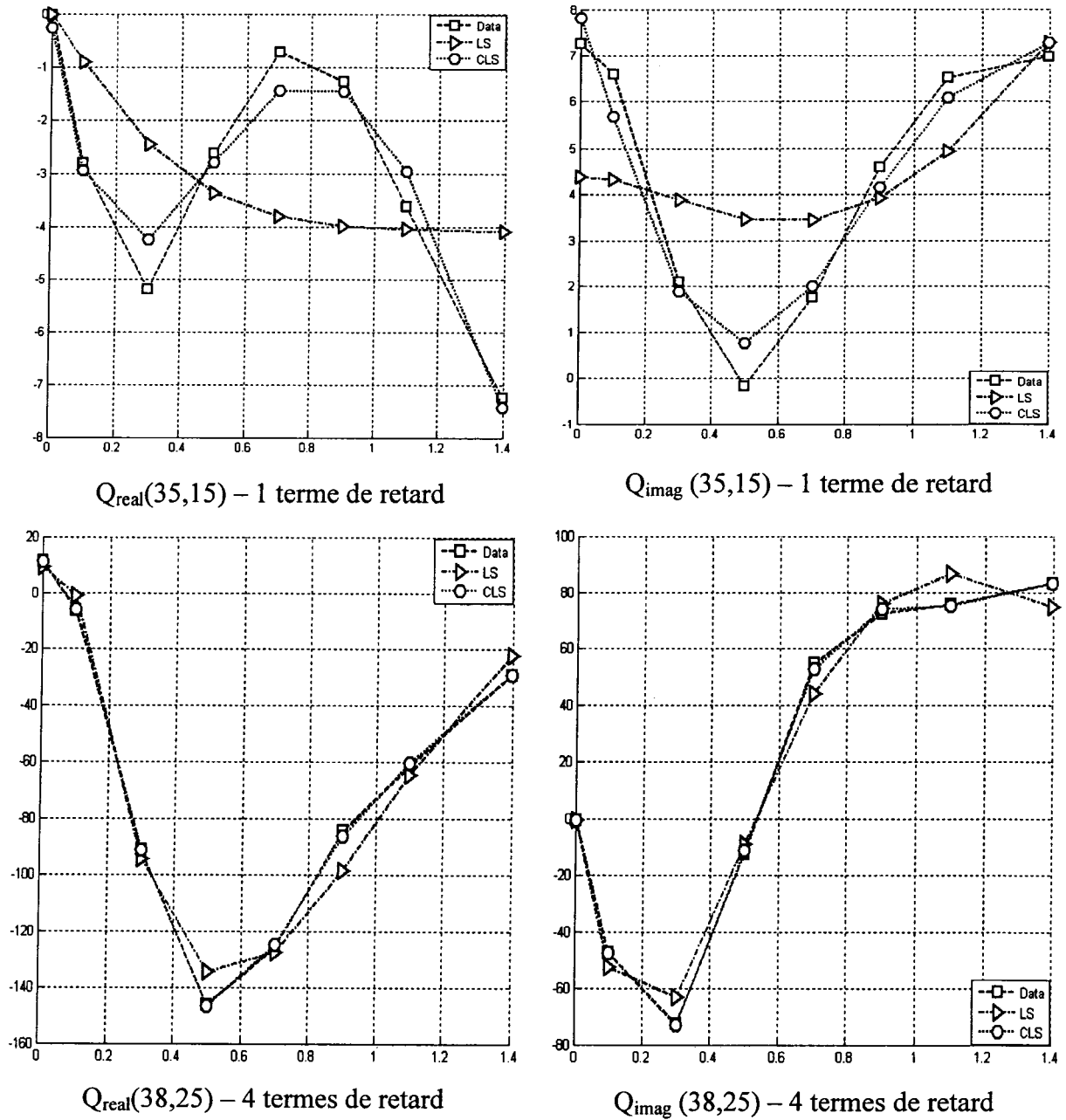


Figure 15 Éléments des parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques $Q(35,15)$ et $Q(38,25)$ versus 8 fréquences réduites k pour 1 et 4 termes de retard

7.1.2 Présentation des taux de réductions des forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* versus la méthode *CLS*

Les valeurs numériques du taux de réduction des forces aérodynamiques (réelles, imaginaires et totales) pour 1 à 6 termes de retard et pour 44 modes symétriques et 50 modes anti-symétriques de l'avion sont calculées dans le tableau ci-dessous :

Tableau III

Taux de réduction des forces aérodynamiques (*CLS* vs *LS*) calculés pour 1 à 6 termes de retard (44 modes symétriques et 50 modes anti-symétriques)

Nombre des termes de retard	Taux de réduction pour Q_R		Taux de réduction pour Q_I		Taux de réduction pour Q	
	44 modes Sym	50 modes Anti-Sym	44 modes Sym	50 modes Anti-Sym	44 modes Sym	50 modes Anti-Sym
1	47.8557	53.2161	55.0565	55.6118	52.9452	55.6701
2	40.0813	50.1881	40.8778	49.2132	40.7686	49.7256
3	50.1427	47.9628	32.9445	43.1553	44.6819	46.1208
4	85.0945	69.3996	78.7497	68.0849	82.4504	69.0531
5	99.9798	34.9087	99.9745	47.8878	99.9775	42.9524
6	96.3031	87.7367	96.2231	88.6993	96.4076	88.7839

7.1.3 Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement

Les tableaux IV et V montrent les vitesses et fréquences de battement obtenus par les méthodes *LS* (avec 8 termes de retard) et *CLS* (avec 1 à 4 termes de retard) par rapport aux vitesses et fréquences de battement standard pour les 44 modes symétriques de l'avion (Tableau IV) et pour les 50 modes anti-symétriques (Tableau V) de l'avion F/A-18.

Tableau IV

Résultats de battement obtenus avec les méthodes *LS* et *CLS* par rapport aux résultats de battement standard pour 44 modes symétriques de l'avion

	Battement #1	Battement #2	Battement #3	Battement #4
<i>pk-LS</i> (8 lags)	Speed : 0.015 % Freq : 2.232 %	Speed : 0.644 % Freq : 0.339 %	Speed : 0.018 % Freq : 0.223 %	Speed : 0.298 % Freq : 0.053 %
<i>pk-CLS</i> (1 lag)	Speed : 4.142 % Freq : 1.599 %	Speed : 4.211 % Freq : 15.606 %	Speed : 4.089 % Freq : 29.534 %	Speed : 0.707 % Freq : 0.181 %
<i>pk-CLS</i> (2 lags)	Speed : 0.230 % Freq : 1.268 %	Speed : 0.893 % Freq : 15.933 %	Speed : 1.934 % Freq : 35.367 %	Speed : 0.044 % Freq : 0.0005 %
<i>pk-CLS</i> (3 lags)	Speed : 3.304 % Freq : 1.394 %	Speed : 6.118 % Freq : 1.642 %	Speed : 1.895 % Freq : 0.261 %	Speed : 0.0001 % Freq : 0.032 %
<i>pk-CLS</i> (4 lags)	Speed : 0.204 % Freq : 0.233 %	Speed : 0.351 % Freq : 0.078 %	Speed : 0.301 % Freq : 0.117 %	Speed : 0.014 % Freq : 0.041 %

Tableau V

Résultats de battement obtenus avec les méthodes *LS* et *CLS* par rapport aux résultats de battement standard pour 50 modes anti-symétriques de l'avion

	Flutter #1	Flutter #2	Flutter #3	Flutter #4
<i>pk-LS</i> (8 lags)	Speed : 0.15 % Freq : 0.161 %	Speed : 0.563 % Freq : 0.112 %	Speed : 1.243 % Freq : 0.092 %	Speed : 1.737 % Freq : 0.940 %
<i>pk-CLS</i> (1 lag)	Speed : 1.633 % Freq : 0.537 %	Speed : 0.822 % Freq : 0.922 %	Speed : 5.477 % Freq : 0.176 %	Speed : 1.563 % Freq : 0.147 %
<i>pk-CLS</i> (2 lags)	Speed : 2.013 % Freq : 0.273 %	Speed : 0.706 % Freq : 0.877 %	Speed : 5.016 % Freq : 0.204 %	Speed : 2.450 % Freq : 0.503 %
<i>pk-CLS</i> (3 lags)	Speed : 0.491 % Freq : 0.088 %	Speed : 0.096 % Freq : 0.032 %	Speed : 0.326 % Freq : 0.022 %	Speed : 2.501 % Freq : 0.569 %
<i>pk-CLS</i> (4 lags)	Speed : 0.092 % Freq : 0.082 %	Speed : 0.680 % Freq : 0.192 %	Speed : 0.328 % Freq : 0.0357 %	Speed : 1.897 % Freq : 0.493 %

7.1.4 Présentation des temps de calcul

Dans les figures 16 et 17, le temps d'exécution est présenté pour les approximations des forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* versus la méthode *CLS*. Le temps d'exécution pour les calculs des forces aérodynamiques par la méthode *LS* versus la méthode *CLS* avec 1 à 6 termes de retard pour les 44 modes symétriques est montré dans la Figure 16, et pour les 50 modes anti-symétriques est montré dans la Figure 17.

La partie corrective prise par le temps d'exécution de la méthode *CLS* est exprimée en tant que la différence entre le temps maximum d'exécution obtenu avec la méthode *LS* et le temps maximum obtenu avec la méthode *CLS*.

Dans la figure 18, nous pouvons voir que cette partie corrective prend un temps maximum d'une seconde pour un nombre de termes de retard maximum de 6.

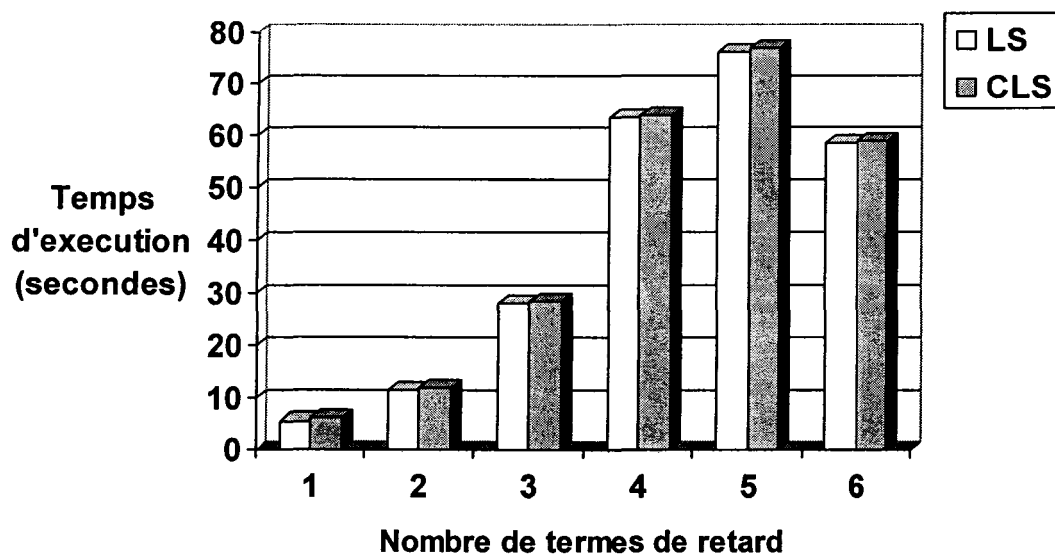


Figure 16 Le temps d'exécution (en secondes) des méthodes *LS* et *CLS* pour 44 modes symétriques de l'avion CL-604 et pour 1 à 6 termes de retard

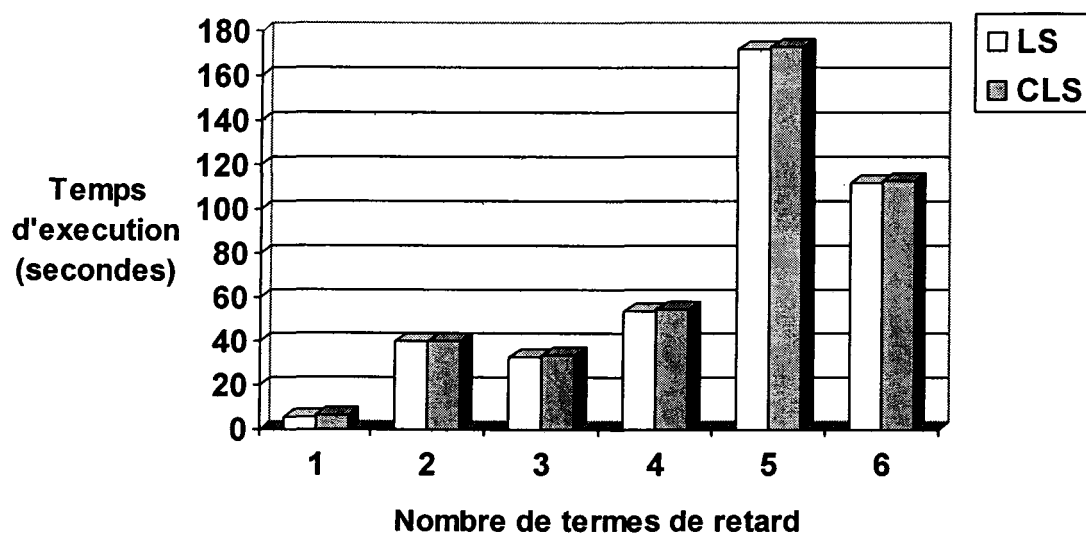


Figure 17 Le temps d'exécution (en secondes) des méthodes *LS* et *CLS* pour 50 modes anti-symétriques de l'avion CL-604 et pour 1 à 6 termes de retard

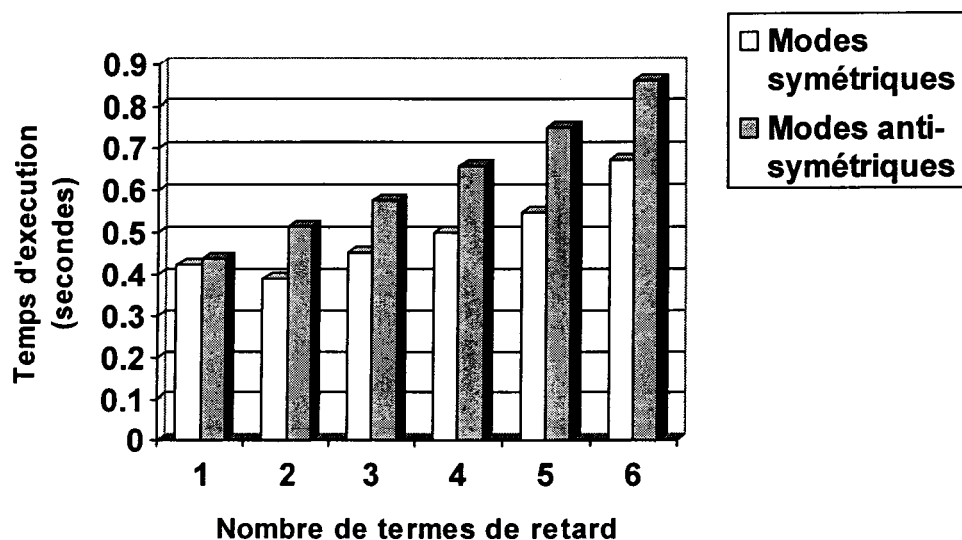


Figure 18 Le temps d'exécution (en secondes) pour l'estimation de l'erreur des forces aérodynamiques calculées par la méthode CLS versus LS pour les modes symétriques et antisymétriques de l'avion CL-604

7.1.5 Discussion des résultats obtenus par la méthode *CLS* pour l'avion CL-604

Dans le tableau III, le taux de réduction des forces aérodynamiques est grand (entre 33% et 99%.) dans le cas de l'application de la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS*, c'est-à-dire que les forces calculées par la méthode *LS* sont proches des forces calculées par la méthode *CLS*. Le temps d'exécution de la nouvelle méthode *CLS* est proche du temps d'exécution de la méthode *LS*, voir les figures 16, 17 et 18.

Les forces aérodynamiques obtenues par les méthodes d'approximation *LS* et *CLS* sont montrées versus les forces aérodynamiques $Q(k)$ calculées avec la méthode *DLM* dans la Figure 15 pour deux éléments. Dans tous les cas, pour tous les éléments, nous avons noté qu'avec la méthode *CLS* les forces aérodynamiques sont plus proches des forces aérodynamiques dans le domaine de fréquence $Q(k)$ et ont des meilleures formes que les formes générées par la méthode *LS* standard.

Nous observons dans les tableaux IV et V que nous obtenons les meilleurs résultats par l'utilisation de la méthode *CLS* avec 4 termes de retard et de la méthode *LS* avec huit (8) termes de retard.

7.2 Résultats obtenus par les méthodes *MS*, *CMS* et *pk* appliquée sur les avions F/A-18

Nous intégrons l'approximation des forces aérodynamiques par les méthodes *MS* et *CMS* dans la méthode *pk* de battement et nous obtenons les vitesses et fréquences de battement. Les deux méthodes *MS* et *CMS* ont été appliquées sur les modes symétriques et anti-symétriques de l'avion F/A-18 pour deux nombres de Mach $M = 1.1$ et $M = 1.3$. Le taux de réduction de l'erreur relative pour la vitesse et la fréquence calculée par les méthodes *MS* et *CMS* versus la vitesse et la fréquence calculée par la méthode *pk* est défini comme suite :

$$100 * abs(V_{MS} - V_{pk}) / V_{pk} \qquad 100 * abs(f_{MS} - f_{pk}) / V_{pk} \qquad (9.1)$$

$$100 * abs(V_{CMS} - V_{pk}) / V_{pk} \qquad 100 * abs(f_{CMS} - f_{pk}) / V_{pk} \qquad (9.2)$$

où f est la fréquence de battement, V est la vitesse de battement et abs est la valeur absolue de la fonction (fréquence ou vitesse).

7.2.1 Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement

Les tableaux VI et VII montrent les erreurs relatives des premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 to 10 termes de retard par rapport aux premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculés par la méthode *pk* standard de battement pour les modes symétriques de l'avion F/A-18 au nombre de Mach = 1.1.

Tableau VI

Erreurs relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_1 (%)	f_1 (%)	V_1 (%)	f_1 (%)
2	1.97	1.52	1.52	1.36
3	0.44	1.85	0.65	1.69
4	0.28	1.52	0.10	0.72
5	0.06	1.28	0.20	1.36
6	0.26	1.04	0.25	0.88
7	0.03	0.80	0.06	0.64
8	0.22	0.64	0.27	0.56
9	0.29	1.44	0.19	1.36
10	0.16	0.80	0.17	0.72

Tableau VII

Erreurs relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_2 (%)	f_2 (%)	V_2 (%)	f_2 (%)
2	10.25	1.39	3.42	0.51
3	11.86	1.49	5.09	0.77
4	10.88	1.28	4.80	0.62
5	8.93	0.91	5.17	0.66
6	5.26	0.55	3.17	0.29
7	3.63	0.33	2.15	0.18
8	2.82	0.26	1.81	0.11
9	4.64	0.55	2.85	0.29
10	2.44	0.18	1.45	0.11

Les figures 19 et 20 montrent les résultats présentés dans les tableaux VI et VII visuellement sous la forme de barres.

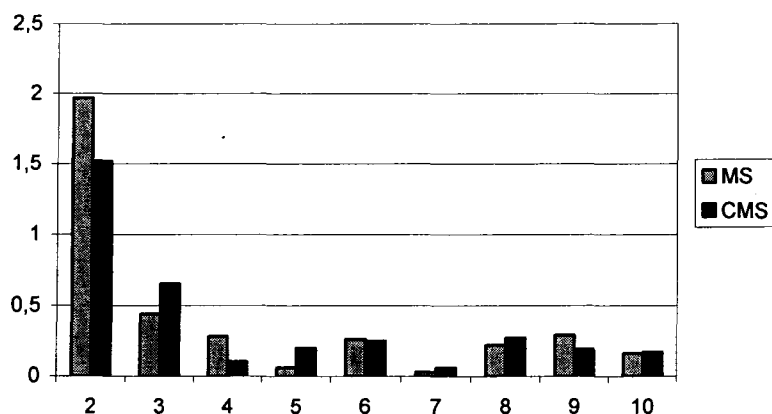


Figure 19 Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.

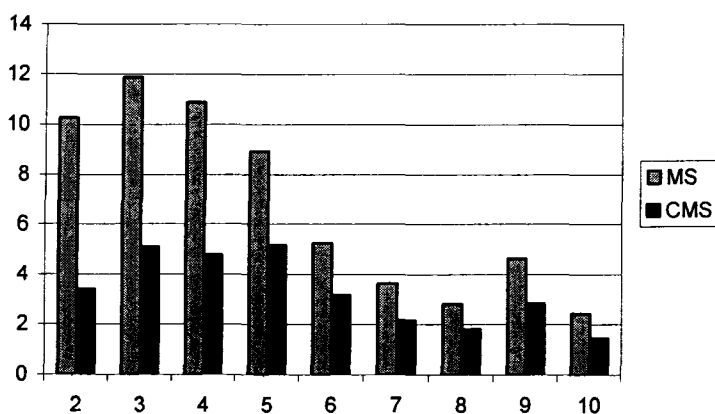


Figure 20 Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18.

Les tableaux VIII et IX montrent les erreurs relatives des premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées avec la méthode *pk* standard au nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18.

Tableau VIII

Erreurs relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_1 (%)	f_1 (%)	V_1 (%)	f_1 (%)
2	0.66	0.29	0.40	0.14
3	0.77	0.36	0.65	0.22
4	0.49	0.07	0.40	0
5	0.40	0.29	0.32	0.29
6	0.06	0.43	0.01	0.29
7	0.21	0.43	0.17	0.36
8	0.03	0.36	0.003	0.29
9	0.21	0.29	0.21	0.29
10	0.06	0.07	0.01	0.22

Tableau IX

Erreurs relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti - symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_2 (%)	f_2 (%)	V_2 (%)	f_2 (%)
2	5.64	0.44	3.28	0.40
3	5.96	0.58	3.36	0.40
4	5.07	0.51	3.02	0.36
5	3.73	0.33	2.19	0.22
6	2.51	0.26	1.43	0.11
7	2.40	0.26	1.33	0.07
8	1.87	0.15	1.08	0.07
9	1.62	0.11	0.87	0.04
10	1.51	0.11	0.82	0.04

Les figures 21 et 22 montrent visuellement sous la forme de barres, les résultats présentés dans les tableaux VIII et IX.

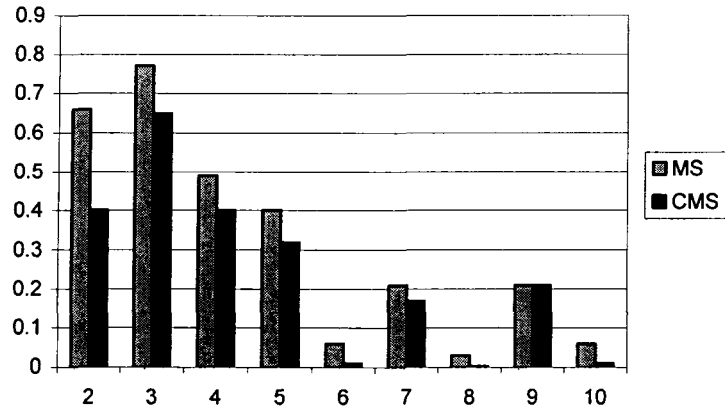


Figure 21 Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18

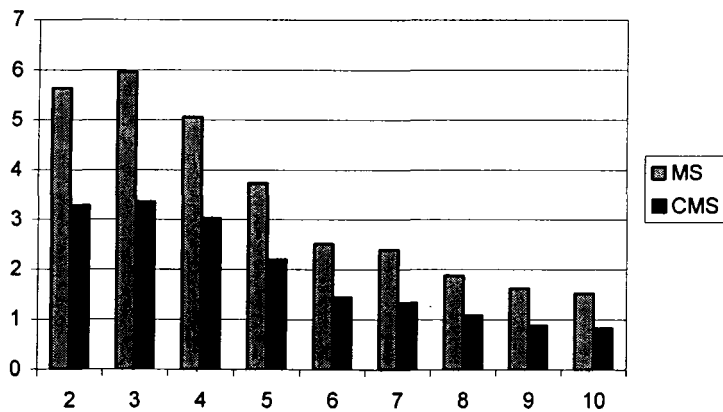


Figure 22 Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, représentés sous la forme des barres, pour le nombre de Mach = 1.1 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18

Les tableaux X et XI montrent les erreurs relatives des premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculés par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculés par la méthode *pk* standard pour les modes symétriques d'un avion F/A-18 au nombre de Mach = 1.3.

Tableau X

Erreurs relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_1 (%)	f_1 (%)	V_1 (%)	f_1 (%)
2	1.25	1.31	0.37	0.07
3	0.56	0	0.17	0
4	0.27	0.04	0.08	0
5	0.24	0.04	0.03	0.04
6	0.16	0	0.04	0
7	0.16	0.04	0.04	0.04
8	0.09	0.04	0.10	0

Tableau XI

Erreurs relatives des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_2 (%)	f_2 (%)	V_2 (%)	f_2 (%)
2	6.4	2.14	5.33	0.29
3	3.04	0.29	2.22	0.29
4	1.17	0.14	0.06	0.07
5	1.67	0.21	1.59	0.14
6	0.72	0.14	0.72	0.07
7	0.85	0	0.75	0.07
8	1.28	0.14	1.28	0.07

Les figures 23 et 24 montrent visuellement sous la forme de barres, les résultats présentés dans les tableaux X et XI.

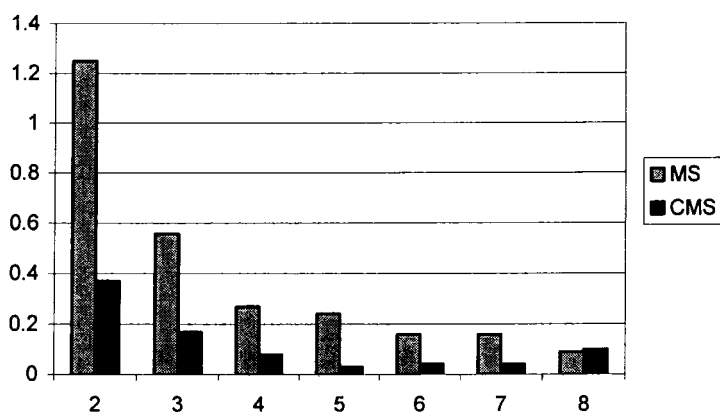


Figure 23 Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, sous forme de barres, au nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

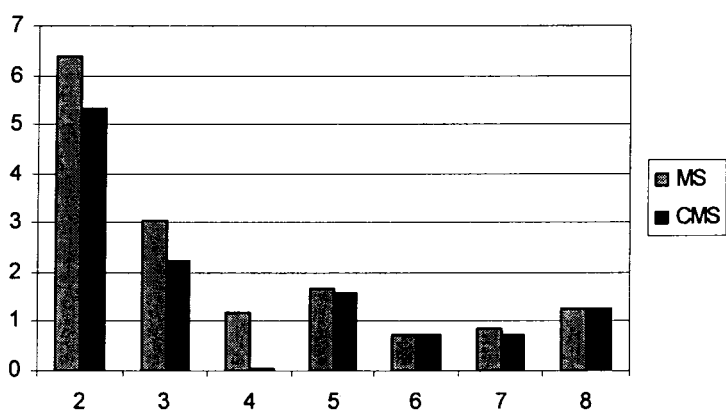


Figure 24 Erreurs relatives des deuxièmes vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, sous forme de barres, au nombre de Mach = 1.3 et pour les modes symétriques de l'avion F/A-18

Le tableau XII montre les erreurs relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 8 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard de battement pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18 au nombre de Mach = 1.3.

Tableau XII

Erreurs relatives des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18

Nombre de termes de retard	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_1 (%)	f_1 (%)	V_1 (%)	f_1 (%)
2	1.53	0.32	0.57	0.18
3	1.26	0.25	0.83	0.22
4	0.65	0.11	0.63	0.11
5	0.31	0.04	0.23	0.04
6	0.14	0	0.05	0
7	0.22	0.07	0.17	0.04
8	0.21	0.07	0.20	0.07

La figure suivante montre visuellement, sous la forme de barres, les résultats numériques présentés au tableau XII.

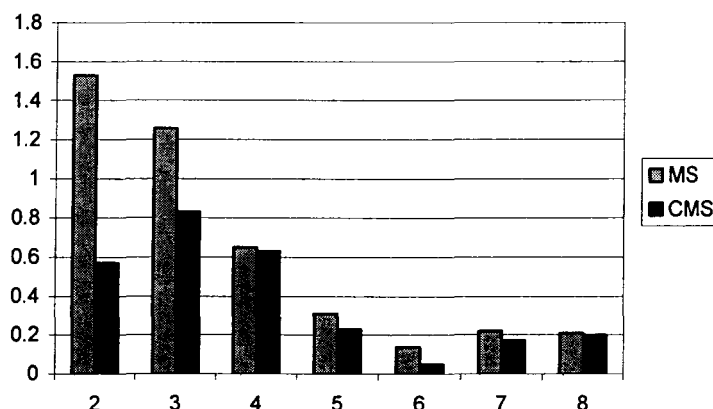


Figure 25 Erreurs relatives des premières vitesses de battement calculées par les méthodes *MS* et *CMS* pour un ensemble de 2 à 10 termes de retard par rapport aux premières vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard, sous forme de barres, pour le nombre de Mach = 1.3 et pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A-18

7.2.2 Discussion des résultats obtenus par la méthode *CMS* pour l'avion F/A-18

À partir des tableaux VI, VIII, X et XII pour les modes symétriques de l'avion F/A-18, la plus petite vitesse équivalente (en pourcentage) V (%) calculée avec la méthode *MS* par rapport à celle calculée par la méthode *pk* apparaît pour un nombre de 7 termes de retard (=0.03). La première vitesse la plus proche à cette valeur en pourcentage, calculée avec la méthode *CMS* a été trouvée pour le même nombre de 7 termes de retard (=0.06). Le même critère de sélection est appliqué pour les autres vitesses et fréquences, alors dans le tableau XIII nous présentons un sommaire de ces types de résultats (le nombre de termes de retard optimaux). Le nombre de termes de retard optimaux a été toujours trouvé plus petit dans le cas de l'application de la méthode *CMS* par rapport au nombre de termes de retard utilisé dans la méthode *MS*.

Le sommaire des mêmes types de résultats (nombre de termes de retard optimaux) obtenus dans les tableaux VII, IX et XI est donné dans le tableau XIV pour les deuxièmes vitesses et fréquences de battement pour l'avion F/A-18.

Tableau XIII

Nombre optimal de termes de retard correspondant aux premières vitesses équivalentes et fréquences les plus proches calculées par les méthodes *MS* et *CMS* dans 4 cas : $M = 1.1$ et $M = 1.3$ pour les modes symétriques et anti-symétriques d'un avion F/A-18

Nombre de Mach et types de modes	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_1 (%)	f_1 (%)	V_1 (%)	f_1 (%)
$M = 1.1$ (symétriques)	7	8	7	7
$M = 1.1$ (anti-symétriques)	8	4	6	2
$M = 1.3$ (symétriques)	8	3	4	3
$M = 1.3$ (anti-symétriques)	6	7	6	4

Tableau XIV

Nombre optimal de termes de retard correspondant aux deuxièmes vitesses équivalentes et fréquences les plus proches calculées par les méthodes *MS* et *CMS* dans 4 cas : $M = 1.1$ et $M = 1.3$ pour les modes symétriques et anti-symétriques d'un avion F/A-18

Nombre de Mach et types de modes	Méthode <i>MS</i>		Méthode <i>CMS</i>	
	V_2 (%)	f_2 (%)	V_2 (%)	f_2 (%)
$M = 1.1$ (symétriques)	10	10	7	7
$M = 1.1$ (anti-symétriques)	10	9	6	6
$M = 1.3$ (symétriques)	6	7	6	4
$M = 1.3$ (anti-symétriques)	-	-	-	-

Dans les tableaux XIII et XIV, nous observons que l'avantage principal de la nouvelle méthode *CMS* est sa vitesse d'exécution qui est plus rapide que celle de la méthode *MS*, car la nouvelle méthode *CMS* demande un nombre de termes de retard plus bas que le nombre de termes de retard demandé par la méthode *MS* pour obtenir les plus proches vitesses et fréquences de battement aux vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard.

La forme des forces aérodynamiques approximées avec la nouvelle méthode est similaire à la forme de ces forces approximées avec la méthode classique *MS*. Pour cette raison, un deuxième avantage de cette nouvelle méthode consiste dans son intégration dans les équations de mouvement aéroélastique qui est similaire à l'intégration de la méthode classique *MS* dans ces équations. Un aspect de l'intégration consiste dans l'évaluation de l'erreur d'approximation et dans son ajout à la forme finale d'approximation.

La nouvelle méthode développée dans cette thèse pour l'avion F/A-18 est basée sur la méthode *MS* classique et elle est très efficace pour les études des interactions aéroserveoélastiques, car la méthode *MS* peut devenir plus précise lorsqu'un plus grand nombre de termes de retard est ajouté. Cependant, ce fait implique des très grands calculs qui affectent la vitesse des calculs, pendant que notre nouvelle méthode *CMS* réduit le temps d'exécution ce qui est très important pour les études des interactions aéroserveoélastiques sur un avion.

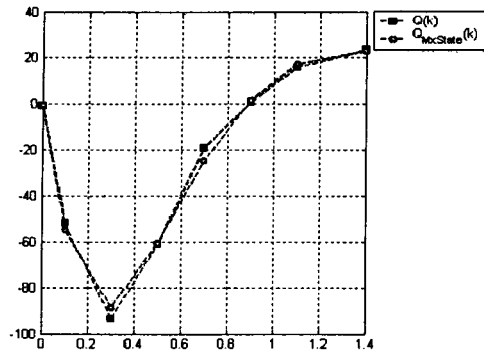
7.3 Résultats obtenus par la méthode *MxState* appliquée sur le CL-604

7.3.1 Présentation des approximations des forces aérodynamiques

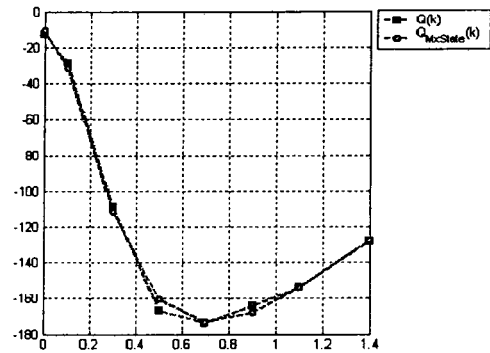
Nous présentons les éléments des forces aérodynamiques obtenus en utilisant la méthode *DLM* (Doublet Lattice Method) en NASTRAN (données initiales dénotées par $Q(k)$) et en utilisant la méthode *MxState*, dénotée par $Q_{MxState}(k)$ sur le modèle d'avion CL-604 fourni par la compagnie Bombardier Aéronautique CL-604.

Les forces approximées par la méthode *MxState* sont très proches aux forces aérodynamiques discrètes calculées par NASTRAN. Nous avons ajouté une correction aux résultats obtenus par la méthode *MxState* pour enlever les espaces (différences) entre les forces estimées par la méthode *MxState* et les forces aérodynamiques initiales $Q_{données}(k)$ calculées en NASTRAN. Les figures 26 montrent les éléments des forces

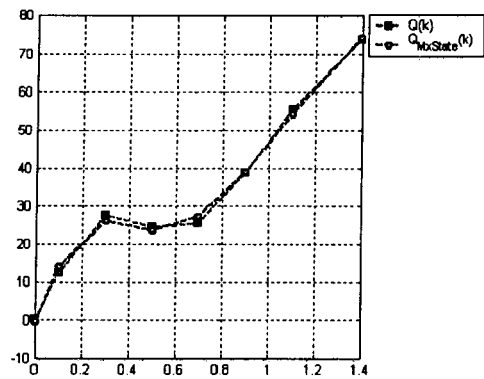
aérodynamiques choisies aléatoirement $Q(30,15)$, $Q(17,23)$, $Q(37,5)$ et $Q(17,5)$ pour 1, 2, 3 et 4 termes de retard respectivement. La partie droite des figures 26 représente les forces aérodynamiques imaginaires, et la partie gauche des figures 26 représente les forces aérodynamiques réelles.



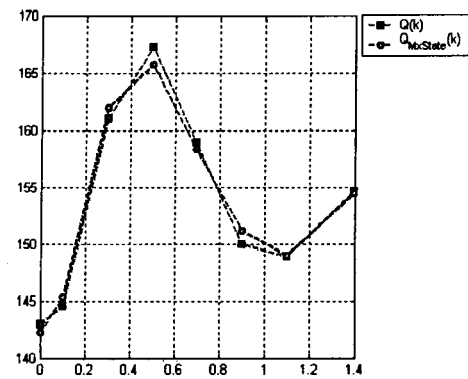
$Q_R(30,15)$; $n_{Lags} = 1$ terme de retard



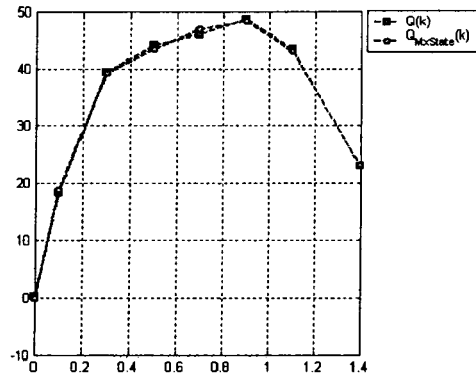
$Q_I(30,15)$; $n_{Lags} = 1$ terme de retard



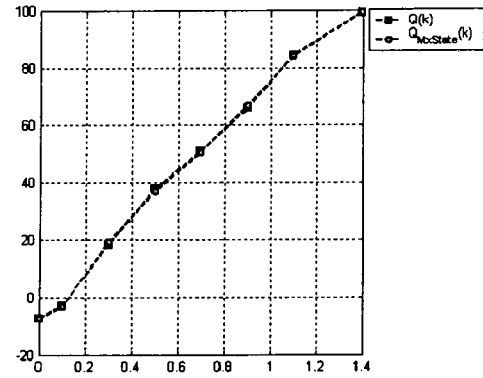
$Q_R(17,23)$; $n_{Lags} = 2$ termes de retard



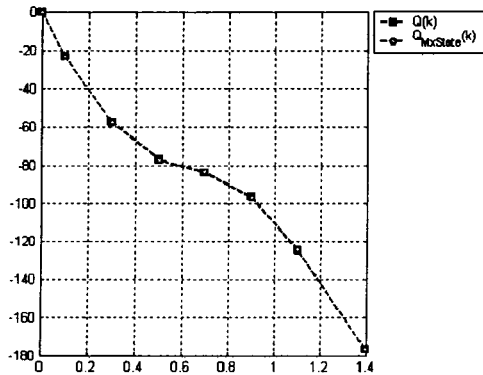
$Q_I(17,23)$; $n_{Lags} = 2$ termes de retard



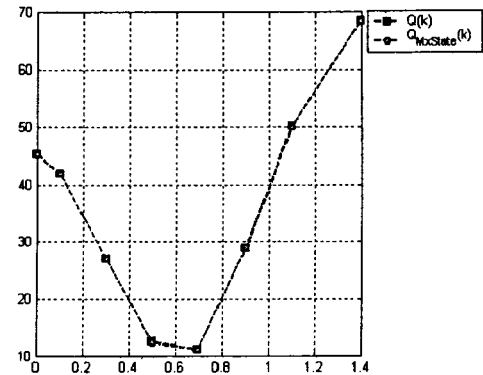
$Q_R (37,5); n_{Lags} = 3$ termes de retard



$Q_I (37,5); n_{Lags} = 3$ termes de retard



$Q_R (17,5); n_{Lags} = 4$ termes de retard



$Q_I (17,5); n_{Lags} = 4$ termes de retard

Figure 26 Quatre éléments des forces aérodynamiques versus la fréquence réduite k approximées en utilisant la méthode *MxState* par rapport aux forces aérodynamiques calculées en NASTRAN

Nous avons obtenu plusieurs résultats (vitesses et fréquences) de battement en utilisant l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode de battement pk . Pour l'avion CL-604, un nombre de 4 valeurs de battement (vitesses et fréquences) ont été prédites.

7.3.2 Présentation des taux de précision des vitesses et fréquences de battement

Les figures 27 et 28 représentent, sous la forme des barres, les différences dans les valeurs des vitesses de battement (en noeuds) calculées avec des méthodes différentes d'approximation telles que la méthode d'état minimum *LS* (avec 8 termes de retard) et la méthode *MxState* (avec 1, 2, 3 et 4 termes de retard) introduites dans la méthode de battement *pk* par rapport aux vitesses et fréquences de battement calculées avec le programme par la méthode *pk* de battement standard. Nous avons calculé ces différences en termes des 'résultats des erreurs dans les vitesses de battement'.

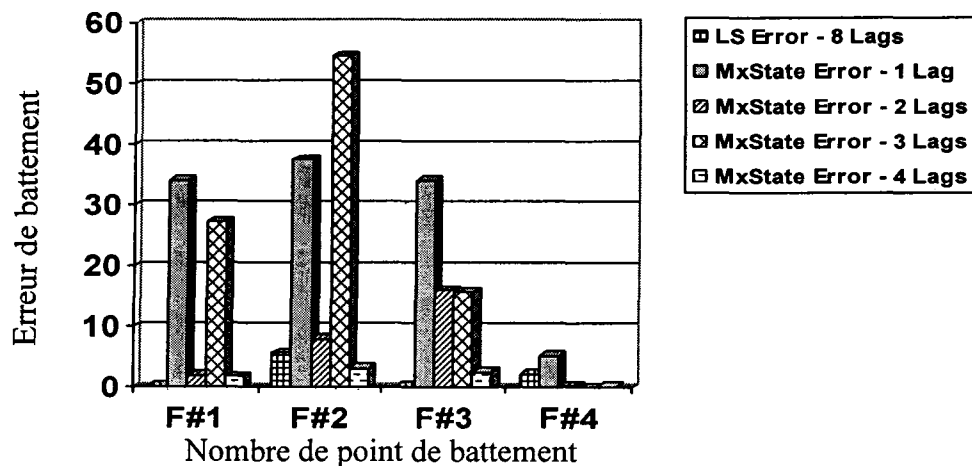


Figure 27 Erreur de la vitesse de battement (noeuds) calculées par la méthode *LS* avec 8 termes de retard et avec la méthode *MxState* en utilisant 1 à 4 termes de retard pour 44 modes symétriques

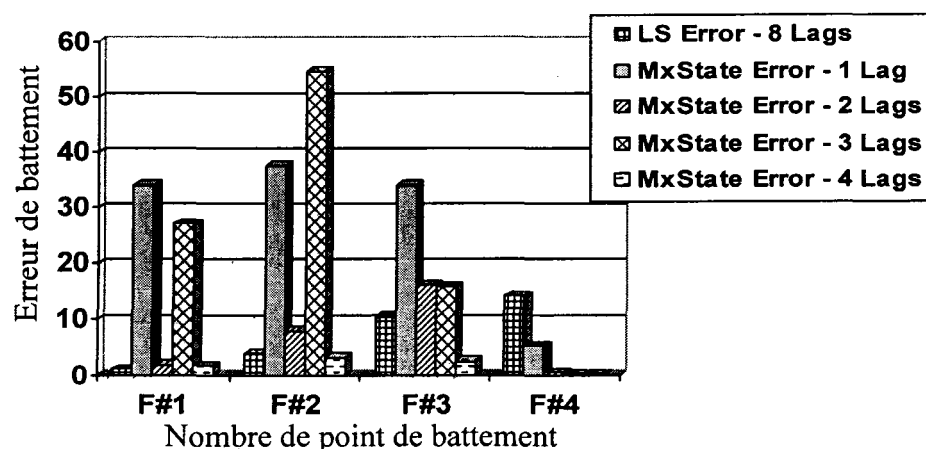


Figure 28 Erreur de la vitesse de battement (noeuds) calculées par la méthode *LS* avec 8 termes de retard et avec la méthode *MxState* en utilisant 1 à 4 termes de retard pour 50 modes anti-symétriques

Les figures 29 et 30 montrent, sous la forme de barres, les différences dans les valeurs des fréquences de battement (Hz) calculées avec des méthodes d'approximation différentes telles que *LS* (avec 8 termes de retard) et avec notre nouvelle méthode *MxState* (avec 1, 2, 3 et 4 termes de retard) par rapport aux fréquences de battement (Hz) calculées avec le programme pour la méthode *pk* de battement standard.

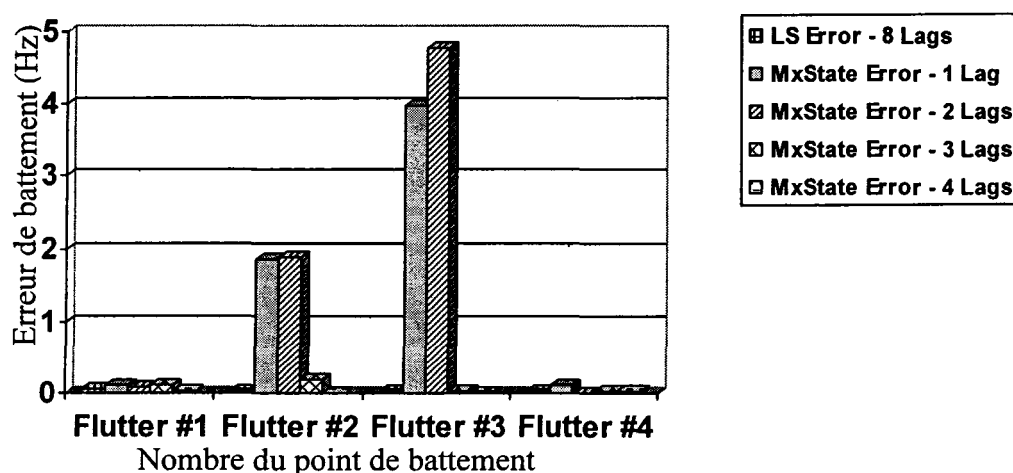


Figure 29 Erreur de la fréquence de battement (Hz) calculées par la méthode *LS* avec 8 termes de retard et avec la méthode *MxState* en utilisant de 1 à 4 termes de retard pour 44 modes symétriques pour l'avion CL-604

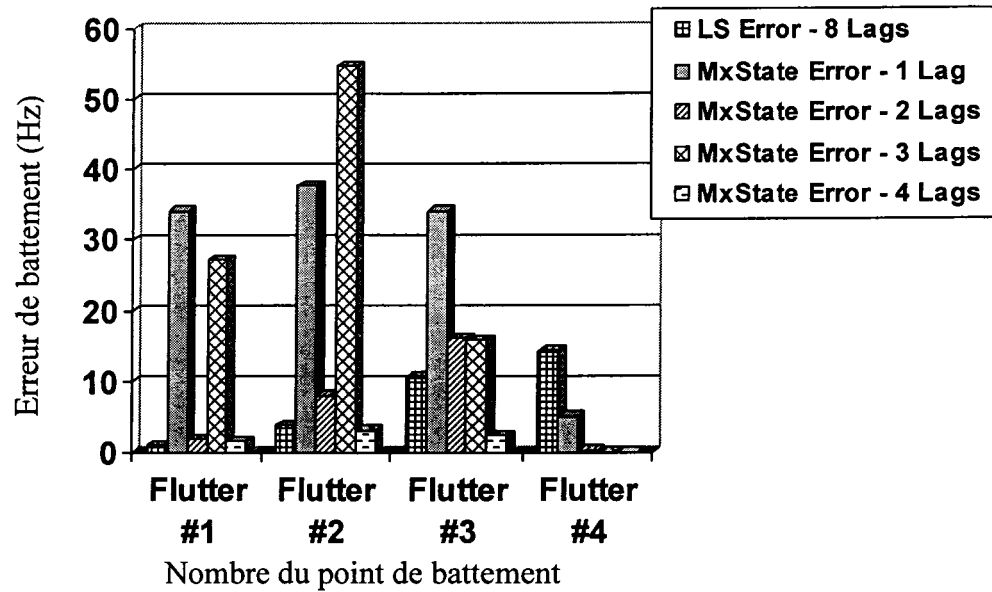


Figure 30 Erreur de la fréquence de battement (Hz) calculées par la méthode *LS* avec 8 termes de retard et avec la méthode *MxState* en utilisant de 1 à 4 termes de retard pour 50 modes anti-symétriques pour l'avion CL-604

7.3.3 Discussion des résultats obtenus par la méthode *MxState* pour le CL-604

La nouvelle méthode *MxState* nous permet d'obtenir l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode *MS* sans l'utilisation d'un algorithme long et itératif. De cette manière, nous minimisons le nombre de termes de retard dans le dernier terme de l'approximation *MS*, ce qui vaut dire que le nombre de termes de retard appliqué aux

deux termes : $\sum_{i=1}^{n_{Lag}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s$ and $D[sI - R]^{-1} E s$ est le même.

Nous avons comparé les vitesses et fréquences de battement calculées par la méthode *pk* standard de battement avec les vitesses et fréquences de battement approximées par la méthode *LS* avec 8 termes de retard, et avec les vitesses et fréquences de battement approximées par la méthode combinée *MxState* avec 1 à 4 termes de retard pour l'avion d'affaires CL-604.

Nous avons trouvé que la méthode *MxState* avec 4 termes de retard donne des résultats très proches des résultats obtenus par la méthode *pk* standard de battement et par la méthode *LS* d'approximation avec 8 termes de retard. Nous avons trouvé que les plus petites erreurs calculées dans les deux cas (pour les modes symétriques et anti-symétriques) sont celles calculées par la méthode *MxState* avec 4 termes de retard. Ces résultats ont été obtenus sur l'avion CL-604 avec 44 modes symétriques et 50 modes anti-symétriques pour le nombre de Mach $M = 0.88$.

CONCLUSIONS

Les conclusions sont divisées en deux parties : la première partie concerne les avantages des méthodes *CLS*, *CMS* et Mixed State par rapport aux méthodes *LS* et *MS* et la deuxième partie concerne le résumé des contributions dans la thèse.

Le premier avantage des méthodes *CLS* et *CMS* est que la forme finale des approximations des forces aérodynamiques obtenue avec ces méthodes est similaire à la forme des forces aérodynamiques obtenues par les méthodes *LS* et *MS* respectivement, ce qui voudrait dire que l'introduction de la nouvelle méthode *CLS* ou *CMS* dans l'équation générale aéroélastique est similaire à l'introduction de la méthode *LS* ou *MS* dans cette équation. Pour les utilisateurs de la méthode *LS* ou *MS* standard, les méthodes *CLS* et *CMS* sont faciles à intégrer dans les programmes par ordinateur. Il faut alors ajouter la partie corrective au programme de la méthode *LS* pour qu'il devienne un programme de la méthode *CLS* et ainsi pour passer de l'approximation des forces par la méthode *LS* à l'approximation des forces par la nouvelle méthode *CLS*, seulement quelques modifications sont demandées.

Le deuxième avantage de ces méthodes est que l'erreur d'approximation est évaluée et ajoutée à la forme de l'erreur finale. L'avantage peut être vu sur les graphiques des forces aérodynamiques où la qualité meilleure de l'approximation pour un petit nombre de termes de retard est montrée. Suite à l'analyse des figures et des tableaux des valeurs de vitesses et fréquences de battements, nous pouvons observer la réduction de l'erreur d'estimation des forces aérodynamiques $Q(s)$ avec les méthodes *CLS* et *CMS* par rapport aux méthodes *LS* et la méthode *MS*.

Le troisième avantage consiste dans la valeur du temps d'exécution. Avec moins de termes de retard et avec plus de précision, les méthodes *CLS* et *CMS*, par rapport aux

méthodes *LS* et *MS*, nous donnent des meilleurs résultats dans moins du temps. Finalement, dans

l'exemple de la nouvelle méthode *CLS*, cette dernière méthode est extrêmement efficace pour les études des interactions aéroserveoélastiques spécialement si nous utilisons un nombre de terme de retard égal à quatre.

Nous obtenons les mêmes types des conclusions pour la méthode *MxState*. Cette méthode est efficace avec quatre termes de retard, c'est-à-dire elle donne des résultats très proches des résultats obtenus par la méthode *pk* standard de battement. La méthode *MxState* nous permet de passer de la formation *LS* à celle de *MS* et de combiner les avantages de la méthode *LS* avec celle de la méthode *MS*. Suite à l'analyse réalisée au chapitre consacré à la méthode *MxState*, nous pouvons conclure que contrairement à ce que pensent les utilisateurs de la méthode standard *MS*, celle-ci n'est au fait qu'un cas particulier de la méthode *LS* standard. De ce fait, nous recommandons à ces usagers d'utiliser l'algorithme de la méthode *LS* pour approximer les forces aérodynamiques puis les transformer les résultats sous les formes données par la méthode *MS*, ce qui va engendrer une économie considérable en termes de temps d'exécution.

Nous pouvons dire aussi que toutes les nouvelles approches déjà vues jusqu'à présent sont d'une extrême utilité telle que dans le cas d'une analyse de commande d'allègement de rafales où le point de départ dans cette analyse repose sur l'équation (2.15). Dans ce cas, les forces aérodynamiques peuvent avoir selon le code de la FAA (Federal Administration Aviation) une forme générale $(1-\cos)$.

Finalement, tous les résultats obtenus sur l'avion CL-604 ont été présentés, discutés puis délivrés avec succès aux ingénieurs de Bombardier Aéronautique et de la NASA DFRC.

Nous sommes les premiers à avoir introduit le concept de l'erreur lors de la modélisation des forces aérodynamiques non-stationnaires. Les contributions apportées aux techniques déjà existantes LS ou MS ne se limitent pas seulement aux modèles mathématiques proposés de corrections ou d'erreurs – dans le but d'obtenir les nouvelles méthodes *CLS* et *CMS*. Enfin, le résumé de nos contributions est:

1. Modification de l'algorithme standard des moindres carrés *LS* par l'optimisation des termes de retard. Plusieurs nombres de termes de retard sont considérés.
2. Modélisation analytique des formes des erreurs pour les méthodes corrigées *CLS* et *CMS* par les mêmes formes analytiques des forces aérodynamiques *LS* et *MS*.
3. Nouvelle formulation appelée *MxState* qui est une combinaison des deux formes standard des méthodes *LS* et *MS*.
4. Intégration du modèle des forces aérodynamiques dans le modèle d'avion et analyse du battement.
5. Proposition d'une version modifiée et améliorée de l'algorithme de la méthode standard *pk*. La nouvelle version de l'algorithme résout le problème de tri des valeurs propres.
6. Prévion et analyse des vitesses et fréquences de battement sur deux avions différents F/A-18 et CL-604.
7. Validation de la modélisation des forces, du nouvel algorithme *pk* et du tri des valeurs propres du système sur deux types de modèles d'avions différents.
8. Nous avons plusieurs articles et présentations scientifiques qui sont soit soumis, soit en cours de publication ou soit déjà publiés ou présentés (Voir les annexes 1,2 et 3).

ANNEXE 1

CORRECTED LEAST SQUARES METHOD FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES (Voir références [28], [30] et [38])

Corrected Least Squares Method for AeroServoElasticity Studies

Djallel Eddine Biskri¹, Ruxandra Mihaela Botez¹,

Nicholas Stathopoulos², Sylvain Thérien², Alexandre Rathe², Martin Dickinson²

¹École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montréal, Qué., H3C 1K3

²Bombardier Aéronautique, 400 Cote Vertu West, Montréal, Qué., H4S 1Y9

1. Introduction

Aeroservoelasticity study is a multidisciplinary study of three main disciplines: unsteady aerodynamics, aeroelasticity and servo-controls. In these studies, three classical methods [1-5] are used to approximate the unsteady generalized forces by rational functions from the frequency domain $Q(k)$ to the Laplace domain $Q(s)$: Least Square (LS), Matrix Padé (MP) and Minimum State (MS).

We present here a new method, called Corrected Least Square CLS, based on the Least Square LS approximation method. This new CLS method uses an analytical form of the error as function of Laplace variable s similar to the analytical form of the aerodynamic forces calculated by the Least Square LS method. We applied this new method to an existing business aircraft and we found that the CLS method may give between 33% and to 99% reduction rate in comparison with the LS method.

2. Method presentation

In the Least Square LS method, we need to increase the number of lag terms in order to find the best values of aerodynamic unsteady forces approximations in the Laplace domain $Q_{LS}(s)$ close to their initial values in the frequency domain $Q(k)$. Unfortunately, the increase of lag terms number will increase the number of states in the final matrix system, which might have a negative influence on the final ASE system behavior. For

this reason, we present here a new method based on the Least Square LS method called Corrected Least Square CLS method. This new CLS method minimizes extremely well the error between $Q(k)$ and its approximation in the Laplace domain.

The LS method gives the unsteady forces approximation in the Laplace domain $Q_{LS}(s)$ for the unsteady forces in the reduced frequency domain $Q(k)$. The difference between the unsteady aerodynamic forces calculated in the frequency domain by the Doublet Lattice Method DLM written as $Q(k)$ and the unsteady aerodynamic forces in the Laplace domain s written as $Q(s) = Q_{LS}$ gives the following matrix error :

$$e_1 = Q(k) - Q_{LS} \quad (1.1)$$

This error e_1 does not have an analytical form. The new feature studied in this paper is the introduction of an error written under the form of an analytical function of s , as denoted here by $e(s)$.

In the new CLS method, the unsteady aerodynamic force $Q_{LS}(s)$ calculated by the CLS new method at a given Mach number M is a matrix of $(m * n)$ dimensions which may be written as a sum of its estimation $Q_{LS}(s)$ by the LS method and the error function $e(s)$:

$$Q_{CLS}(s) = Q_{LS}(s) + e(s) \quad (1.2)$$

Where $e(s) = Q_{CLS}(s) - Q_{LS}(s)$. $Q_{LS}(s)$ is written as follows:

$$Q_{LS}(s) = A_0^{LS} + A_1^{LS} s + A_2^{LS} s^2 + \frac{A_3^{LS}}{s + b_1^{LS}} s + \frac{A_4^{LS}}{s + b_2^{LS}} s + \dots + \frac{A_{i+2}^{LS}}{s + b_i^{LS}} s \quad (1.3)$$

Where A_i^{LS} are estimated matrices of dimensions $(m * n)$ and b_i^{LS} are the estimated lag terms by the LS method. The error function $e(s)$ will be approximated under the following form :

$$e(s) = A_0^{err} + A_1^{err} s + A_2^{err} s^2 + \frac{A_3^{err}}{s + b_1^{err}} s + \frac{A_4^{err}}{s + b_2^{err}} s + \dots \frac{A_{i+2}^{err}}{s + b_i^{err}} s \quad (1.4)$$

Where A_i^{err} are error matrices of dimensions $(m * n)$ and b_i^{err} are the estimated lag terms. We will also consider, for simplicity, the same number of lag terms in equations (1.3) and (1.4), which may be written as follows:

$$b_1^{err} = b_1^{LS}, b_2^{err} = b_2^{LS}, \dots, b_i^{err} = b_i^{LS} \quad (1.5)$$

We will further consider the minimization criteria J defined as follows:

$$J = \sum_1^l [e_1 - e(s)]^2 \quad (1.6)$$

Where e_1 is given by equation (1.1) and $e(s)$ is the error calculated by equation (1.4). This method was applied on a business aircraft for one flight condition (one Mach number and 8 reduced frequencies).

3. Results

We present our results in the next three figures. Figures 1 and 2 show the execution time of the LS and our new CLS method for the aircraft symmetric modes (see figure 1) and the aircraft anti-symmetric modes (see figure 2) versus the total number of lags.

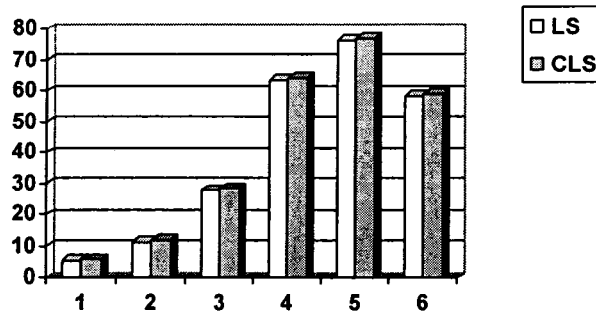


Figure 1 Execution Time of the LS and the CLS methods for the symmetric modes versus the total number of lags (seconds)

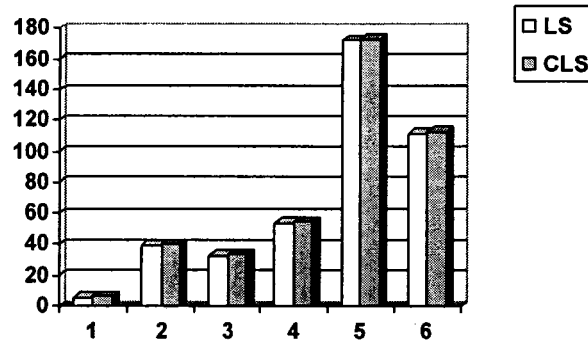


Figure 2 Execution Time of the LS and the CLS methods for the anti-symmetric modes versus the total number of lags (seconds)

Figure 3 shows the reduction rate which is expressed by equation $100 \cdot \text{abs}(Q_{LS} - Q_{CLS}) / Q_{LS}$, where abs is the absolute value function. We show here the reduction rate of the total aerodynamic forces (composed of real and imaginary parts) versus the total number of lag terms.

Number of lag terms	Q error 44 sym modes	Q error 50 anti-sym modes
1	52.95 %	55.67 %
2	40.77 %	49.73 %
3	44.68 %	46.12 %
4	82.45 %	69.05 %
5	99.98 %	42.95 %
6	96.41 %	88.78 %

Figure 3 Reduction rate of the aerodynamic forces errors versus the total number of lags

4. Discussion

As seen on the above three figures, the estimation error is very much reduced when we apply CLS method with respect to LS method. The reduction rate for the error ranges goes from 33% to 99%. Figures 1 and 2 show that the execution time of the CLS is almost the same as for the LS. The conclusion is that for the same execution time, the CLS gives better results. In general, to obtain good results, traditional LS method needs a large number of lag terms (8 in our case). We noticed from figure 3, that using CLS method with only four lags terms the aerodynamic forces are corrected by a minimum of 70% with respect to the LS method results with eight lag terms. This correction is very important for the flutter speed accuracy.

5. References

- [1] S.H. Tiffany, and W.M. Adams : "Nonlinear programming extensions to rational function approximation of unsteady aerodynamics", *NASA TP-2776*, (1988).
- [2] J.W. Edwards : "Unsteady aerodynamic modeling and active aeroelastic control", *SUDAAR 504*, Stanford University, Stanford, CA, (1977).
- [3] K.L. Roger : "Airplane math modeling methods for active control design", *Structural Aspects of Active Controls*, CP-228, *AGARD*, 4.1-4.11 (1977).
- [4] R. Vepa : "Finite state modeling of aeroelastic system", *NASA CR-2779*, (1977).

- [5] M. Karpel : “Design for flutter suppression and gust alleviation using state space modeling”, *Journal of Aircraft*, 19(3), 221-227 (1982).

ANNEXE 2

AERODYNAMIC FORCES BASED ON AN ERROR ANALYTICAL FORMULATION FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES ON A F/A-18 AIRCRAFT (voir référence [37])

***Aerodynamic forces based on an error analytical formulation for
aeroservoelasticity studies on an F/A-18 aircraft***

by

Djallel Eddine Biskri¹ and Ruxandra Mihaela Botez¹

¹École de technologie supérieure, Department of Automated Production Engineering
1100 Notre Dame West, Montreal, Que., Canada, H3C 1K3

Abstract

Two classical methods are used in the literature to approximate the unsteady generalized forces from the frequency domain $Q(k)$ to the Laplace domain $Q(s)$ and these methods are : the Least Squares LS and the Minimum State MS . In the present paper, we present a new method, called Corrected Minimum State (CMS), based on the Standard MS approximation method. This new CMS method uses an analytical form of the error as function of Laplace variable similar to the analytical form of the aerodynamic forces calculated with the MS method. We applied this new method to an F/A-18 aircraft and we found that the CMS method brings improvements in the approximation results in comparison with the standard MS method. It is shown that use of the CMS method on an F/A-18 aircraft will give better results in terms of convergence speeds and precision than the MS method.

Keywords : aerodynamics, aeroelasticity, aeroservoelasticity, flutter, approximations

Nomenclature

$A_{0,1,2}^{MS}$	Estimated matrix by MS method of $(r \times c)$ dimensions
$A_{0,1,2}^{Err}$	Error matrix of $(r \times c)$ dimensions
ADAM	Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems

AFWAL	Air Force Wright Aeronautical Laboratories
ATM	Aircraft Test Model
CMS	Corrected Minimum State
CPM	Constant Pressure Method
D^{MS}	Estimated matrix by <i>MS</i> method of $(r * n_{Lags})$
D^{Err}	Error matrix of $(r * n_{Lags})$
DLM	Doublet Lattice Method
E^{MS}	Estimated matrix by <i>MS</i> method of $(n_{Lags} * c)$
E^{Err}	Error matrix of $(n_{Lags} * c)$
E^*	Error matrix term in E^{Err} matrix of dimension $(c * c)$
$Err(s)$	Estimated error matrix in Laplace domain
ISAC	Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls
J	Quadratic optimization criteria
k_i	Reduced frequencies
LCO	Limit Cycle Oscillation
LS	Least Square method
MP	Matrix Padé method
MS	Minimum state method
n_{Lags}	Total lag terms number
POD	Proper Orthogonal Decomposition
$Q(k)$	Aerodynamic forces in frequency domain
$Q_{ij}(k)$	Aerodynamic forces element in frequency domain.
$Q(s)$	Aerodynamic forces in Laplace domain
$\hat{Q}_{MS}(s)$	Aerodynamic forces estimated by <i>MS</i> method in Laplace domain
R^{MS}	Diagonal square matrix of dimension of $(n_{Lags} * n_{Lags})$
R^{Err}	Error diagonal square matrix of dimension of $(n_{Lags} * n_{Lags})$
RAC	Reconfigurable Adaptive Control
STARS	Structural Analysis Routines

1. Introduction

Aeroservoelastic interactions studies regard interactions between three disciplines on an aircraft, which are : unsteady aerodynamics, aeroelasticity and servo-controls. One main aspect of these studies concerns the conversion of unsteady aerodynamic forces from frequency into Laplace domain. The most known methods for this type of conversion are the *LS* (Least Squares), *MP* (Matrix Pade) and *MS* (Minimum State) which are implemented in most of aeroservoelastic codes.

The Least Squares method using second order Pade polynomials [1] was implemented in ADAM (Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems) developed at AFWAL (Air Force Wright Aeronautical Laboratories) [2], STARS (STructural Analysis Routines) software [3] developed at NASA DFRC (Dryden Flight Research Center).

Each term of the aerodynamic matrix was approximated by a polynomial ratio in Laplace variable by use of the Matrix Padé *MP* method [4]. Other modifications of the *MP* method were suggested in [5, 6].

The capability to enforce or relax the constraints was included in the *LS*, *MP* and *MS* methods [7]. These capabilities were abbreviated as *ELS*, *EMP* and *EMS*, and they were introduced in the aeroservoelastic computer program called Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls (ISAC). The minimum state approach was included in the ASTROS computer program [8] developed at NASA Langley Research Center [9]. This method offers a savings in the number of added states with little or no loss of accuracy in modelling the aerodynamic forces. However, its applicability to the unsteady aerodynamics in the transonic and hypersonic regimes remains to be established.

The Minimum State method was implemented in ZAERO software, which uses an expedient nonlinear unsteady transonic method to generate system matrices. Reduced-order techniques using proper orthogonal decomposition (POD) and minimum state (MIST) methods reduce the system to seven states, rendering an on-line algorithm to be operated within fractions of one second [10]. A reconfigurable adaptive control (RAC) system for limit cycle oscillation (LCO) suppression of five F/A-18 aircraft / store configurations was shown at 5.6 Hz and 8.8 Hz.

The convergence of minimum state approximation method *MS* of unsteady generalised aerodynamic forces in the equation of motion of flexible aircraft was shown by Botez and Bigras [11] by use of an original feature. At each iteration, an optimal compromise is chosen between the present and the last iteration.

In two papers, Cotoi and Botez [12, 13] proposed a new approach based on a Padé approximation and used order reduction methods for the last term of the approximation, which could be seen as a transfer function of a linear system. The approximation error obtained with this new method is 12-40 times lower than the error obtained with the *MS* method for the same number of augmented states and depends of the choice made for the model reduction method. This method has the disadvantage to remain expensive in terms of computing time.

Another method based on a Padé polynomial forms which uses the Chebyshev polynomials and their orthogonality properties is presented by Botez et al. [14]. This method was applied on the Aircraft Test Model (ATM) modeled in STARS, on a business aircraft at Bombardier Aerospace and on an F/A-18 aircraft. The error calculated by this method was smaller than 0.814 %. It was found that the computation time for the Chebyshev polynomials method was faster than the computation time for Padé and *LS* methods. In the ATM studies, the computation time taken by the

Chebyshev method was 3 times smaller than in the Padé method and 30 times smaller than in the *LS* case, for any approximation order.

Hiliuta, A. et al. [15] applied a combination of ‘pchip’ and ‘fuzzy clustering techniques’ for the interpolation of unsteady forces calculated for a range of non-evenly spaced reduced frequencies. However, if the range of reduced frequencies was evenly spaced, the results were obtained by use of the Least Square method. With this new method (efficient mainly for a range of non-evenly reduced frequencies), the approximations of these unsteady generalized forces remained in the frequency domain, and in order to obtain their approximations in the Laplace domain, it was necessary to apply a classical method such as Least Squares or Minimum State.

Biskri et al. [16] presented a new mixed method which combines the *LS* and *MS* methods. This new method gave very good results with respect to the *LS* method and combined the strengths of the two classical methods *LS* and *MS*. Flutter analysis results were presented for a business CL-604 aircraft.

In this paper, a new method called the Corrected Minimum State *CMS* is presented. This method is based on the Minimum State *MS* method. The error is estimated and approximated with the same analytical form as the Minimum State standard form. Both forms are further combined to give the final *CMS* approximation for aerodynamic forces. It was found that the new *CMS* method gives better results in terms of accuracy than the *MS* method.

2. Method presentation

In order to present the algorithm for our new method, we need to first introduce the approximation of unsteady aerodynamic forces used in the *LS* method :

$$\hat{Q}_{LS}(s) = A_0^{LS} + A_1^{LS}s + A_2^{LS}s^2 + \sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}^{LS}}{s - b_i} s \quad (1)$$

where b_i are the lags terms and n_{Lags} represents the total number of lag terms.

The Minimum State MS algorithm approximates the aerodynamic forces $Q_{ij}(k)$ calculated in the frequency domain into the Laplace domain by use of the following equation and we obtain :

$$\hat{Q}_{MS}(s) = A_0^{MS} + A_1^{MS}s + A_2^{MS}s^2 + D^{MS} [sI - R^{MS}]^{-1} E^{MS} s \quad (2)$$

Where $A_{0,1,2}^{MS}$ is an assembly of estimated matrices of $(n*m)$ dimensions, R is diagonal square matrix of dimension $(n_{Lags}*n_{Lags})$, D^{MS} and E^{MS} matrices have $(n*n_{Lags})$ and $(n_{Lags}*m)$ dimensions and n_{Lags} represents the total lag terms number.

The disadvantage of the LS method is that a larger number of states are used than in the MS method case in the final system form [5].

The MS method with a large number of lags is more accurate than the MS with small number of lags. However, the MS method with a larger number of lags takes longer execution time than the MS method with a small number of lags. The results obtained with the CMS method will be *close* to the results obtained with the MS method with large number of lags, therefore accuracy and execution time by use of the CMS method will be improved.

To estimate $A_{0,1,2}^{MS}$, D , R and E matrices values, the classic MS algorithm minimizes the quadratic error criteria defined as following :

$$J = \sum_i \sum_j \sum_l W_{ijl}^2 |Q_{ij}(jk_l) - \hat{Q}_{ij,MS}(jk_l)|^2 \quad (3)$$

where i and j are the rows and columns indices and l is the index of reduced frequencies k 's.

By solving eq. (2) and by optimization of the J function, the MS method will give the unsteady forces approximation in the Laplace domain $\hat{Q}_{MS}(s)$ for the unsteady forces in the reduced frequency domain $Q(k)$. The difference between the unsteady aerodynamic forces calculated in the frequency domain by the Doublet Lattice Method (DLM) in the subsonic regime and by the Constant Pressure Method (CPM) in the supersonic regime by use of Nastran software written as $Q(k)$ and the unsteady aerodynamic forces in the Laplace domain s gives the matrix error $Err(s)$ for one Mach number :

$$Err(s) = Q(k) - Q_{MS}(s) \quad (4)$$

$Err(s)$ represents a function of s which quantifies the difference between the estimated aerodynamic forces and the forces initially calculated in the frequency domain. Then, this function $Err(s)$ is written under the same analytical form as the approximated aerodynamic forces by the MS method as shown in eq. (2), and we obtain :

$$Err(s) = A_0^{Err} + A_1^{Err}s + A_2^{Err}s^2 + D^{Err} [sI - R^{Err}]^{-1} E^{Err}s \quad (5)$$

One assumption relates three matrices given by eq. (5) to three matrices given in eq. (2) as follows : $D^{Err} = D^{MS}$, $R^{Err} = R^{MS}$ (D and R matrices are the same as the ones given by the MS method) and $E^{Err} = E^{MS} * E^*$. Thus, eq. (5) becomes :

$$Err(s) = A_0^{Err} + A_1^{Err}s + A_2^{Err}s^2 + D^{MS} [sI - R^{MS}]^{-1} E^{MS} E^*s \quad (6)$$

where E^* is assumed to have $(n*m)$ dimensions, in order to simplify the notations in the above equations.

In order to simplify our method, we assumed that the error, calculated with the MS method, affects only the elements of $A_{0,1,2}^{Err}$ and E^* matrices while D^{MS} and R^{MS} matrices elements are not subject to any error. The product $D^{MS} [sI - R^{MS}]^{-1} E^{MS} E^*$ is subject to

errors propagated by the matrix ‘error’ E^* . However, the reader may assume that the errors are made simultaneously on the D and E matrices. The problem reduces to find the values of $A_{0,1,2}^{Err}$ and E^* matrices. These matrices are computed by minimizing new criteria defined as follows :

$$J = \sum_{i=1}^{n_k} \left| Err_i - A_0^{Err} - A_1^{Err} s - A_2^{Err} s^2 - D^{MS} [sI - R^{MS}]^{-1} E^{MS} E^* s \right|^2 \quad (7)$$

where n_k represents the total number of reduced frequencies.

The final system can be written as : $B = Ax$ by deriving the criteria J with respect to $A_{0,1,2}^{Err}$ and E^* matrices, written as $\frac{\partial J}{\partial A_{0,1,2}^{Err}} = 0$ and $\frac{\partial J}{\partial E^*} = 0$. Matrices B , A and x are :

$$B = \begin{bmatrix} \sum_1^{nLags} Err & \sum_1^{nLags} s Err & \sum_1^{nLags} s^2 Err & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} E s Err \end{bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_1^{nLags} 1 & \sum_1^{nLags} s & \sum_1^{nLags} s^2 & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s E \\ \sum_1^{nLags} s & \sum_1^{nLags} s^2 & \sum_1^{nLags} s^3 & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s^2 E \\ \sum_1^{nLags} s^2 & \sum_1^{nLags} s^3 & \sum_1^{nLags} s^4 & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s^3 E \\ D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s E & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s^2 E & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s^3 E & D \sum_1^{nLags} [sI - R]^{-1} s E \end{bmatrix}$$

and $x = \begin{bmatrix} A_0^{Err} & A_1^{Err} & A_2^{Err} & E^* \end{bmatrix}^T$ (8)

Finally, the total estimated aerodynamic forces can be expressed by equation (9) :

$$Q(s) = A_0^{tot} + A_1^{tot} s + A_2^{tot} s^2 + D^{tot} [sI - R^{tot}]^{-1} E^{tot} s \quad (9)$$

Where :

$$A_{0,1,2}^{tot} = A_{0,1,2}^{MS} + A_{0,1,2}^{Err}$$

$$D^{tot} = D^{MS}$$

$$R^{tot} = R^{MS}$$

$$E^{tot} = E^{MS} (I + E^*)$$

3. Results and discussions

By use of the approximation of the aerodynamic forces with the *MS* and *CMS* methods in the *pk* flutter method, we obtained several flutter points results expressed in terms of flutter speeds and frequencies. Both methods were applied on an F/A-18 aircraft, on its symmetrical and anti-symmetrical modes, for two Mach numbers $M = 1.1$ and $M = 1.3$.

As comparison criteria, equations (10.1) and (10.2) are used, where the error reduction rate and *abs* which is the absolute value function, are defined, as follows :

$$100 * abs(V_{MS} - V_{pk}) / V_{pk} \qquad 100 * abs(f_{MS} - f_{pk}) / V_{pk} \quad (10.1)$$

$$100 * abs(V_{CMS} - V_{pk}) / V_{pk} \qquad 100 * abs(f_{CMS} - f_{pk}) / V_{pk} \quad (10.2)$$

Tables 1 and 2 show the relative errors of first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for a ensemble of 2 to 10 lag terms with respect to the first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *pk* standard method for the symmetric modes of an F/A-18 aircraft at Mach number = 1.1.

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_1(%)	1 st frequency (%)	EAS_1(%)	1 st frequency (%)
2	1.97	1.52	1.52	1.36
3	0.44	1.85	0.65	1.69
4	0.28	1.52	0.10	0.72
5	0.06	1.28	0.20	1.36
6	0.26	1.04	0.25	0.88
7	0.03	0.80	0.06	0.64
8	0.22	0.64	0.27	0.56
9	0.29	1.44	0.19	1.36
10	0.16	0.80	0.17	0.72

Table 1 Relative numerical errors of first flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.1 and F/A-18 symmetric modes

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)
2	10.25	1.39	3.42	0.51
3	11.86	1.49	5.09	0.77
4	10.88	1.28	4.80	0.62
5	8.93	0.91	5.17	0.66
6	5.26	0.55	3.17	0.29
7	3.63	0.33	2.15	0.18
8	2.82	0.26	1.81	0.11
9	4.64	0.55	2.85	0.29
10	2.44	0.18	1.45	0.11

Table 2 Relative numerical errors of second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.1 and F/A-18 symmetric modes

Figures 1 and 2 show visually, in the form of bars, the numerical results presented in tables 1 and 2.

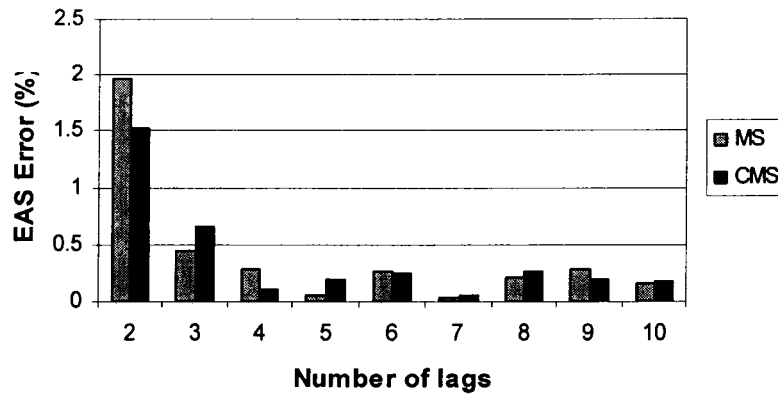


Figure 1 Results of table 1 visualized under bars form

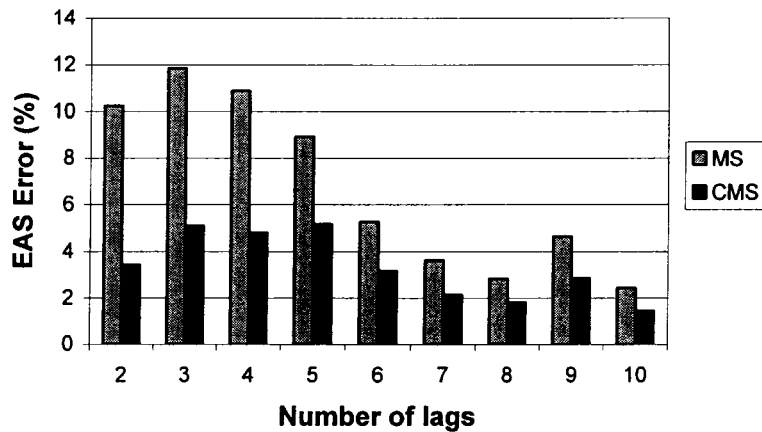


Figure 2 Results of table 2 visualized under bars form

Tables 3 and 4 shows the relative errors of first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for a ensemble of 2 to 10 lag terms with respect to the first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *pk* standard method for the anti-symmetric modes of an F/A-18 aircraft at Mach number = 1.1. Figures 3 and 4 show visually, in the form of 3-D bars, the numerical results presented in tables 3 and 4.

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)
2	0.66	0.29	0.40	0.14
3	0.77	0.36	0.65	0.22
4	0.49	0.07	0.40	0
5	0.40	0.29	0.32	0.29
6	0.06	0.43	0.01	0.29
7	0.21	0.43	0.17	0.36
8	0.03	0.36	0.003	0.29
9	0.21	0.29	0.21	0.29
10	0.06	0.07	0.01	0.22

Table 3 Relative numerical errors of first flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.1 and F/A-18 anti-symmetric modes

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)
2	5.64	0.44	3.28	0.40
3	5.96	0.58	3.36	0.40
4	5.07	0.51	3.02	0.36
5	3.73	0.33	2.19	0.22
6	2.51	0.26	1.43	0.11
7	2.40	0.26	1.33	0.07
8	1.87	0.15	1.08	0.07
9	1.62	0.11	0.87	0.04
10	1.51	0.11	0.82	0.04

Table 4 Relative numerical errors of second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.1 and F/A-18 anti-symmetric modes

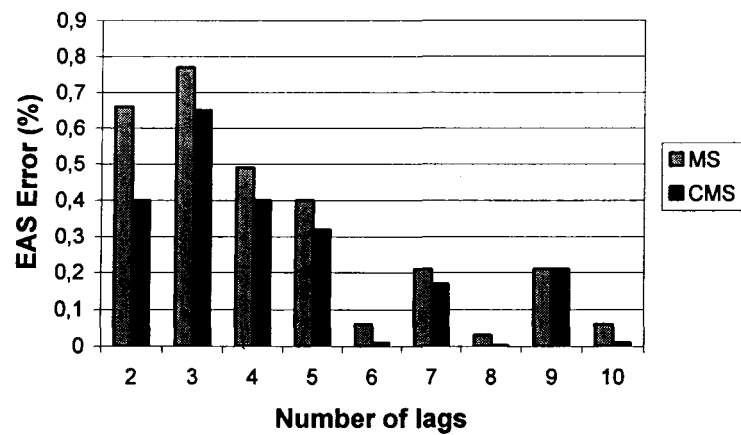


Figure 3 Results of table 3 visualized under bars form

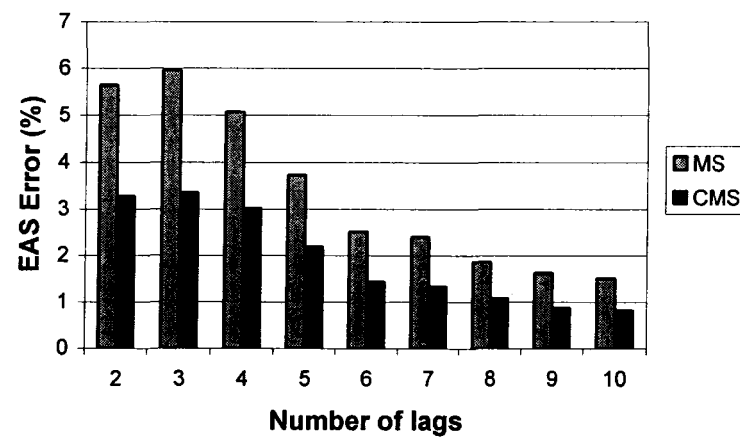


Figure 4 Results of table 4 visualized under bars form

Tables 5 and 6 shows the relative errors of first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for a ensemble of 2 to 10 lag terms with respect to the first and second flutter speeds and frequencies calculated by the *pk* standard method for the symmetric modes of an F/A-18 aircraft at Mach number = 1.3. Figures 5 and 6 show visually, in the form of bars, the numerical results presented in tables 5 and 6.

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)
2	1.25	1.31	0.37	0.07
3	0.56	0	0.17	0
4	0.27	0.04	0.08	0
5	0.24	0.04	0.03	0.04
6	0.16	0	0.04	0
7	0.16	0.04	0.04	0.04
8	0.09	0.04	0.10	0

Table 5 Relative numerical errors of first flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.3 and F/A-18 symmetric modes

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)	EAS_2 (%)	2 nd frequency (%)
2	6.4	2.14	5.33	0.29
3	3.04	0.29	2.22	0.29
4	1.17	0.14	0.06	0.07
5	1.67	0.21	1.59	0.14
6	0.72	0.14	0.72	0.07
7	0.85	0	0.75	0.07
8	1.28	0.14	1.28	0.07

Table 6 Relative numerical errors of second flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus standard *pk* method, for Mach number = 1.3 and F/A-18 symmetric modes

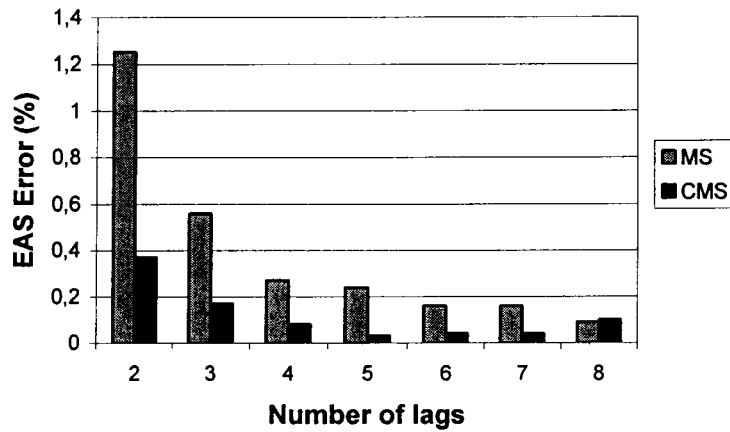


Figure 5 Results of table 5 visualized under bars form

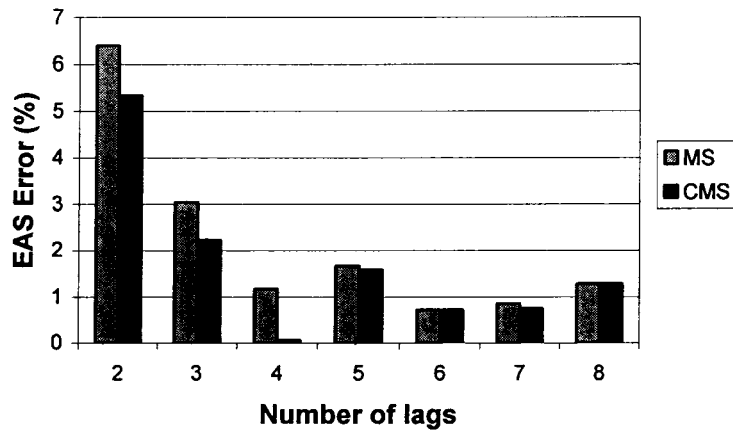


Figure 6 Results of table 6 visualized under bars form

Table 7 shows the relative errors of first flutter speed and frequency calculated by the *MS* and *CMS* methods for a ensemble of 2 to 8 lag terms with respect to the first flutter speed and frequency calculated by the *pk* standard method for the anti-symmetric modes of an F/A-18 aircraft at Mach number = 1.3. Figure 7 shows visually, in the form of bars, the numerical results presented in table 7.

Number of lag terms	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)	EAS_1 (%)	1 st frequency (%)
2	1.53	0.32	0.57	0.18
3	1.26	0.25	0.83	0.22
4	0.65	0.11	0.63	0.11
5	0.31	0.04	0.23	0.04
6	0.14	0	0.05	0
7	0.22	0.07	0.17	0.04
8	0.21	0.07	0.20	0.07

Table 7 Relative numerical errors of first flutter speeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for various lag terms versus the standard *pk* method, for Mach number = 1.3 and F/A-18 anti-symmetric modes

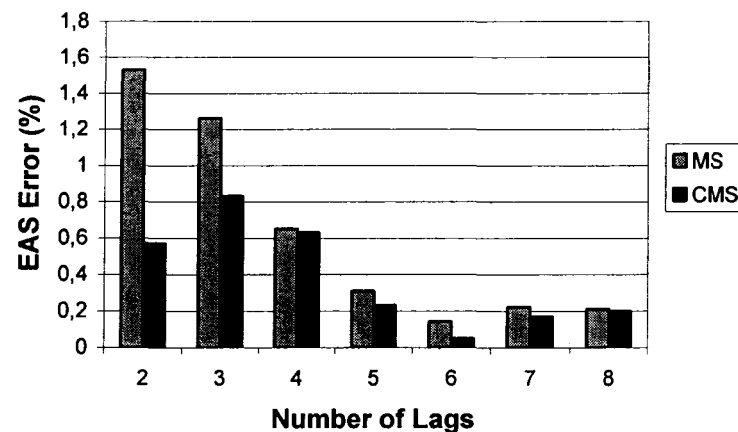


Figure 7 Results of table 7 visualized under bars form

4. Conclusions

From tables 1, 3, 5 and 7 for F/A-18 aircraft symmetric modes, the smallest first equivalent airspeed percentage EAS (%) calculated with the *MS* method appears for 7 lag terms (=0.03). The first closest first EAS percentage (calculated by the *CMS* method) to this value was found for the same number of 7 lag terms (=0.06). A same criterion of reasoning is applied for all other speeds and frequencies.

As shown in table 8, which summarize the results shown in tables 1, 3, 5 and 7, the number of optimal lag terms was found to be always smaller in case of our new *CMS* method application in comparison with the number of optimal lag terms used in the *MS* method. Table 9 summarizes results given in tables 2, 4 and 6 for the second flutter speeds and frequencies.

Mach number & modes type	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_1 (%)	1st frequency (%)	EAS_1 (%)	1st frequency (%)
M = 1.1 symmetric	7	8	7	7
M = 1.1 anti-symmetric	8	4	6	2
M = 1.3 symmetric	8	3	4	3
M = 1.3 anti-symmetric	6	7	6	4

Table 8 Number optimal of lag terms corresponding to closest first equivalent airspeeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for 4 cases : M = 1.1 and M = 1.3 for symmetric and anti-symmetric modes of an F/A-18 aircraft

Mach number & modes type	<i>MS</i> method		<i>CMS</i> method	
	EAS_2 (%)	2nd frequency (%)	EAS_2 (%)	2nd frequency (%)
M = 1.1	10	10	7	7
M = 1.1	10	9	6	6
M = 1.3	6	7	6	4
M = 1.3	-	-	-	-

Table 9 Number optimal of lag terms corresponding to closest second equivalent airspeeds and frequencies calculated by the *MS* and *CMS* methods for 4 cases : M = 1.1 and M = 1.3 for symmetric and anti-symmetric modes of an F/A-18 aircraft

To obtain the closest flutter speeds and frequencies to the flutter speeds and frequencies calculated by the pk standard method, the new method requires a fewer number of lag terms than the classical LS method, as seen in tables 8 and 9.

For this reason, the first and main advantage of this new method with respect to the classical MS method is its execution speed which is faster as fewer lag terms are necessary to obtain the flutter speed closest to the pk flutter speed.

The form of aerodynamic forces approximated with the new method is similar to the form of these forces approximated with the classical MS method. For this reason, a second advantage of this new method consists in its integration into the aeroelastic equations of motion which is similar to the integration of the MS classical method in these equations. An aspect of its integration consists in the evaluation of the approximation error and its addition to the final approximation error form.

For an F/A-18 aircraft, the new method developed in this paper and based on the classical MS method was found to be very efficient for aeroservoelastic interactions studies.

This fact can be explained by the fact that the MS method becomes more accurate when a higher number of lag terms are added which imply high amounts of calculations affecting the speed of computations while our new method reduces the execution time which is important for the aeroservoelasticity studies on an aircraft.

References

- [1] R. Vepa, "Finite state modeling of aeroelastic system", NASA-CR-2779, February 1977.
- [2] Noll, T., Blair, M. and Cerra, J., ADAM, An aeroservoelastic analysis method for analog or digital systems, *Journal of Aircraft*, 1986, Vol. 23(11).
- [3] Gupta, K.K., Development and application of an integrated multidisciplinary analysis capability, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40(3), Feb 15, 1997, pp. 533-550.
- [4] Roger, K.L., Hodges, G.E., and Felt, L., "Active flutter suppression – A flight test demonstration", *Journal of Aircraft*, Vol. 12, pp. 551-556, June 1975.
- [5] Karpel, M., "Design for active flutter suppression and gust alleviation using state space modeling", *Journal of Aircraft*, Vol. 19, pp. 221-227, March 1982.
- [6] Dunn, H.J., "An analytical technique for approximating unsteady aerodynamics in the time domain", NASA-TP-1738, November 1980.
- [7] Tiffany, S.H., Adams, W.M., Jr., "Nonlinear programming extension to rational approximation methods of unsteady aerodynamic forces", NASA-TP-2776, pp. 406-420, July 1988.
- [8] Chen, P.C., Sarhaddi, D., Liu, D.D., Karpel, M., "A unified aerodynamic influence coefficient approach for aeroelastic/aeroservoelastic and MDO applications", AIAA-97-1181, pp. 1271-1277, 1997.
- [9] Adams, W. M. Jr., Hoadley, S. T., ISAC : A tool for aeroservoelastic modeling and analysis, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Vol. 2, pp. 1010-1018.
- [10] Nam, C., Chen, P.C.; Liu, D.D.; Urnes, J.; Yurkovich, R., Adaptive reconfigurable control based on reduced order system identification for flutter and aeroservoelastic instability suppression, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Vol. 4, 2001, pp. 2531-2543.
- [11] Botez, R.M. et Bigras, P., 1999, Methods for the aerodynamic approximation in the Laplace domain for the aeroservoelastic studies, *Libertas Mathematica*, Vol. XIX, pp. 171-181.
- [12] Cotoi, I., R.M. Botez, Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25(5), 2002, pp. 985-987.
- [13] Cotoi, I., Botez, R.M., 2001, Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis. *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications CA2001*, Banff, Canada, pp. 105-108.
- [14] Botez, R.M., Dinu, A., Cotoi, I., 2006, *Approximations of Unsteady Aerodynamic Forces for Closed Loop Flutter Aeroservoelasticity Studies*, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, Paper AIAA-2006-444, 9 - 12 January.

- [15] Hiliuta, A., Botez, R.M., Brenner, M., 2005, Approximation of unsteady aerodynamic forces by use of fuzzy techniques, *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Austin, Texas, 18-21 April.
- [16] Biskri, D.E., Botez, R. M., Therien, S., Rathé, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2005, *New mixed method for unsteady aerodynamic forces approximations for aeroservoelasticity studies*, IFASD 2005 – Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2005, Munich, Germany, June 28 - July 1.

ANNEXE 3

NEW MIXED METHOD FOR UNSTEADY AERODYNAMIC FORCE APPROXIMATIONS FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES (Voir references [27], [29], [35]et [36])

NEW MIXED METHOD FOR UNSTEADY AERODYNAMIC FORCE APPROXIMATIONS FOR AEROSERVOELASTICITY STUDIES

Djallel Biskri^{1,2}, Ruxandra M. Botez¹, N. Stathopoulos², S. Thérien², A. Rathe²,
M. Dickinson²

¹*Ecole de technologie supérieure, Department of Automated Production Engineering
1100 Notre Dame West, Montréal, Que., Canada, H3C 1K3
E-mail : ruxandra@gpa.etsmtl.ca*

²*Bombardier Aerospace, 400 Cote Vertu West, Dorval, Montréal, Que., Canada*

Introduction

The unsteady aerodynamic forces acting on a business aircraft are calculated in the subsonic regime by use of the Doublet Lattice Method (DLM) method using NASTRAN software. These forces are further converted into the Laplace domain for aeroservoelasticity studies. In the literature, classical methods¹⁻³ are used to approximate the unsteady generalized forces from the frequency domain $Q(k)$ to the Laplace domain $Q(s)$. These methods are : Least Square (LS)¹, Matrix Padé (MP)² and Minimum State (MS)³. In this paper, we present a new mixed method based on a combination of the most well known methods available in the aeroservoelasticity literature : the LS and MS methods. We found that our method gives very good results with respect to the LS method and combines the advantages of the two classical methods LS and MS. Flutter results are presented for a business aircraft with 44 symmetric modes and 50 anti-symmetric modes.

New method presentation

This new method uses a combination of the two analytical forms for the conversion of the aerodynamic unsteady forces from the frequency into the Laplace domain given by the *LS* and *MS* methods. Thus, the general form of the unsteady aerodynamic forces in the Laplace domain s is written in the following form:

$$Q(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_{i=1}^{n_{Lag}} \frac{A_{i+2}^{LS}}{s + b_i} s + D[\bar{s}I - R]^{-1} E s \quad (1.1)$$

where $Q(s)$ are the unsteady aerodynamic forces, b_i are the lag terms, A_0 , A_1 , A_2 and A_{i+2}^{LS} are $(n * n)$ matrices, D is a $(n * n_{Lags})$ matrix, R is a $(n_{Lags} * n_{Lags})$ diagonal matrix and E is a $(n_{Lags} * n)$ matrix. The *LS* exponent of A_{i+2}^{LS} shows the *LS* part of eq. (1.1), n is the number of modes ($n = 50$ for anti-symmetric modes case and $n = 44$ for symmetric modes case) and n_{Lags} is the number of lag terms ($n_{Lags} = 8$ in the *LS* method and $n_{Lags} = 1, 2, 3, 4$ in the Mixed State method). The two last terms on the right hand side of equation (1.1) are $\sum_{i=1}^{n_{Lag}} \frac{A_{i+2}^{LS}}{s + b_i} s$ and $D[sI - R]^{-1} E s$. The analytical form of the first term is used in the *LS* method, and the analytical form of the second term is used in the *MS* method. We can write the second term $D[sI - R]^{-1} E s$ in the form of the first term. Thus, eq. (1.1) can be rewritten as follows:

$$Q(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_{i=1}^{n_{Lag}=n_{LS}=n_{MS}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s \quad (1.2)$$

where n_{LS} and n_{MS} represent the number of total lag terms of the *LS* and *MS* methods, respectively. As observed in eq. (1.2), for simplicity, we assumed that the lag terms calculated by the *LS* method are equal to the lag terms calculated by the *MS* method ($b_{i_{LS}} = b_{i_{MS}}$), from which the number of lags are also assumed to be equal ($n_{LS} = n_{MS}$), because of their common denominator. This assumption is done to simplify the new

method's formulation. Once the values of $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ and lag terms b_i (where $i = 1, 2, \dots, n_{Lags}$) are calculated by the *LS* method, we will pass from the standard *LS* form to the new form defined by equation (1.1), and the transfer function $\sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i}$ is expressed as :

$$\sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i} = \sum_{i=1}^{n_{LS}} \frac{A_{i+2}^{LS}}{s + b_i} + D [sI - R]^{-1} E \quad (1.3)$$

In the next section, we will show the calculation of the unknown matrices on the right side of eq. (1.3) from the known matrices on the left side of eq. (1.3) for the easiest case involving two lags ($n_{LS} = n_{MS} = 2$). The A_3 and A_4 matrices (left side of eq (1.3)) may be expressed under the general form :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ a_{21}^3 & a_{22}^3 & a_{23}^3 & \dots & a_{2m}^3 \\ a_{31}^3 & a_{31}^3 & a_{33}^3 & \dots & a_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^3 & a_{n2}^3 & a_{n3}^3 & \dots & a_{nm}^3 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & \dots & a_{1m}^4 \\ a_{21}^4 & a_{22}^4 & a_{23}^4 & \dots & a_{2m}^4 \\ a_{31}^4 & a_{31}^4 & a_{33}^4 & \dots & a_{3m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^4 & a_{n2}^4 & a_{n3}^4 & \dots & a_{nm}^4 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

where the elements of matrices A_3 and A_4 are a_{ij}^3 and a_{ij}^4 (exponents 3 and 4 represent the indices of the A_3 and A_4 matrices). First, we write A_3 in a form where the coefficients in rows 2, 3, \dots , n are written as a function of the first row coefficients, as shown in the next equation :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11}^3 * (1) & a_{12}^3 * (1) & a_{13}^3 * (1) & \dots & a_{1m}^3 * (1) \\ a_{11}^3 * (\alpha_2^3) + r_{21}^3 & a_{12}^3 * (\alpha_2^3) + r_{22}^3 & a_{13}^3 * (\alpha_2^3) + r_{23}^3 & \dots & a_{1m}^3 * (\alpha_2^3) + r_{2m}^3 \\ a_{11}^3 * (\alpha_3^3) + r_{31}^3 & a_{12}^3 * (\alpha_3^3) + r_{32}^3 & a_{13}^3 * (\alpha_3^3) + r_{33}^3 & \dots & a_{1m}^3 * (\alpha_3^3) + r_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}^3 * (\alpha_n^3) + r_{n1}^3 & a_{12}^3 * (\alpha_n^3) + r_{n2}^3 & a_{13}^3 * (\alpha_n^3) + r_{n3}^3 & \dots & a_{1m}^3 * (\alpha_n^3) + r_{nm}^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2^3 & 0 \\ \alpha_3^3 & 0 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^3 & r_{22}^3 & r_{23}^3 & \dots & r_{2m}^3 \\ r_{31}^3 & r_{32}^3 & r_{33}^3 & \dots & r_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^3 & r_{n2}^3 & r_{n3}^3 & \dots & r_{nm}^3 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

where $\alpha_2^3, \alpha_3^3, \dots, \alpha_n^3$ are real factors arbitrarily chosen, $r_{ij}^3 (i = 1 \text{ to } n \text{ and } j = 1 \text{ to } m)$ are real residual values. The A_4 matrix can be written in the same form as the A_3 matrix (as in eq. (1.5)), but its form is rearranged as follows:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2^4 \\ 0 & \alpha_3^4 \\ \dots & \dots \\ 0 & \alpha_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & \dots & a_{1m}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^4 & r_{22}^4 & r_{23}^4 & \dots & r_{2m}^4 \\ r_{31}^4 & r_{32}^4 & r_{33}^4 & \dots & r_{3m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^4 & r_{n2}^4 & r_{n3}^4 & \dots & r_{nm}^4 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

In order to write the representative form of the A_{i+2} matrix ($i = 1, 2, \dots, n_{LS}$), we use the same form as for the A_3 (see eq. (1.5)) or the A_4 matrix (see eq. (1.6)), then we change the position of the $[1, \alpha_2^{i+2}, \alpha_3^{i+2}, \dots, \alpha_n^{i+2}]$ column and the $[a_{11}^{i+2}, a_{12}^{i+2}, a_{13}^{i+2}, \dots, a_{1m}^{i+2}]$ row to the i^{th} column and i^{th} row positions. Now, by computing the summation

$$\sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}}{s+b_i} \text{ (where } n_{Lags} = 2) = \frac{A_3}{s+b_1} + \frac{A_4}{s+b_2}, \text{ we obtain:}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{s+b_1} + \frac{A_4}{s+b_2} &= \frac{1}{s+b_1} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2^3 & 0 \\ \alpha_3^3 & 0 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^3 & r_{22}^3 & r_{23}^3 & \dots & r_{2m}^3 \\ r_{31}^3 & r_{32}^3 & r_{33}^3 & \dots & r_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^3 & r_{n2}^3 & r_{n3}^3 & \dots & r_{nm}^3 \end{bmatrix} \right] \\ &+ \frac{1}{s+b_2} \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2^4 \\ 0 & \alpha_3^4 \\ \dots & \dots \\ 0 & \alpha_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & \dots & a_{1m}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^4 & r_{22}^4 & r_{23}^4 & \dots & r_{2m}^4 \\ r_{31}^4 & r_{32}^4 & r_{33}^4 & \dots & r_{3m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^4 & r_{n2}^4 & r_{n3}^4 & \dots & r_{nm}^4 \end{bmatrix} \right] \quad (1.7) \end{aligned}$$

Then, equation (1.7) may further be written in the following form :

$$\begin{aligned}
\frac{A_3}{s+b_1} + \frac{A_4}{s+b_2} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^4 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^4 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & \alpha_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & \dots & a_{1m}^4 \end{bmatrix} \\
& + \frac{1}{s+b_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^3 & r_{22}^3 & r_{23}^3 & \dots & r_{2m}^3 \\ r_{31}^3 & r_{32}^3 & r_{33}^3 & \dots & r_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^3 & r_{n2}^3 & r_{n3}^3 & \dots & r_{nm}^3 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+b_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^4 & r_{22}^4 & r_{23}^4 & \dots & r_{2m}^4 \\ r_{31}^4 & r_{32}^4 & r_{33}^4 & \dots & r_{3m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^4 & r_{n2}^4 & r_{n3}^4 & \dots & r_{nm}^4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

By the identification of terms, we found the following unknown matrix values (see eq. (1.3)) :

$$A_3^{LS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^3 & r_{22}^3 & r_{23}^3 & \dots & r_{2m}^3 \\ r_{31}^3 & r_{32}^3 & r_{33}^3 & \dots & r_{3m}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^3 & r_{n2}^3 & r_{n3}^3 & \dots & r_{nm}^3 \end{bmatrix}, \quad A_4^{LS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21}^4 & r_{22}^4 & r_{23}^4 & \dots & r_{2m}^4 \\ r_{31}^4 & r_{32}^4 & r_{33}^4 & \dots & r_{3m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^4 & r_{n2}^4 & r_{n3}^4 & \dots & r_{nm}^4 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^4 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^4 \\ \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & \alpha_n^4 \end{bmatrix}, \quad [sI - R]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b_2} \end{bmatrix} \text{ and } E = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & \dots & a_{1m}^4 \end{bmatrix}$$

We can see that the first-row elements of all of the A_{i+2}^{LS} matrices are equal to zero ($= 0$) and that the first-row elements of the D matrix are equal to one ($= 1$). In sum, we observe that the inverse problem requires only a few matrix manipulations – very useful when conserving computation time. Programming the inverse problem does not require iterative solutions. We can see that :

1. The formulation of the aerodynamic forces in the Laplace domain as described by equation (1.1) is very simple.
2. It is possible to obtain equation (1.8) as it is represented by equation (1.12) by modifying the standard LS equation as :

$$Q(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s \quad (1.10)$$

where A_{i+2} is a product of two matrices C_{i+2} and ML_{i+2} .

C_{i+2} are a set of constant matrix that have the general form :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2^{i+2} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3^{i+2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \alpha_n^{i+2} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

ML_{i+2} are a set of matrix to compute by an iterative process and have the

general form :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{i+2} & a_{12}^{i+2} & a_{13}^{i+2} & \dots & a_{1m}^{i+2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \text{ Thus, the sum of terms } A_{i+2} = C_{i+2} ML_{i+2},$$

where $i = 1$ to n_{Lags} can be written as follows :

$$\begin{aligned} \frac{A}{s+b_1} + \frac{A_4}{s+b_2} + \dots + \frac{A_{k+2}}{s+b_k} &= \frac{1}{s+b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ \alpha_2^3 & 0 \dots 0 \\ \alpha_3^3 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_n^3 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & a_{13}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \frac{1}{s+b_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 \\ 0 & \alpha_2^4 & \dots 0 \\ 0 & \alpha_3^4 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & \alpha_n^4 & \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & a_{13}^4 & 0 & a_{1m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ + \frac{1}{s+b_k} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2^{k+2} \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_3^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}^{k+2} & a_{12}^{k+2} & a_{13}^{k+2} & 0 & a_{1m}^{k+2} \end{bmatrix} \quad (1.11) \end{aligned}$$

and will be written under the following condensed form :

$$\frac{A_3}{s+b_1} + \frac{A_4}{s+b_2} + \dots + \frac{A_{k+2}}{s+b_k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^4 & \dots & \alpha_2^{k+2} \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^4 & \dots & \alpha_3^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & \alpha_n^4 & \dots & \alpha_n^{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+b_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & \dots & a_{1m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}^{k+2} & a_{12}^{k+2} & \dots & a_{1m}^{k+2} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^4 & \dots & \alpha_2^{k+2} \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^4 & \dots & \alpha_3^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^3 & \alpha_n^4 & \dots & \alpha_n^{k+2} \end{bmatrix} [sI - R]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{s+b_k} \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} a_{11}^3 & a_{12}^3 & \dots & a_{1m}^3 \\ a_{11}^4 & a_{12}^4 & \dots & a_{1m}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}^{k+2} & a_{12}^{k+2} & \dots & a_{1m}^{k+2} \end{bmatrix}$$

where $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n_{Lags}$.

By use of equations (1.10)-(1.12), the method of calculation of A_{i+2} coefficients was modified in comparison with the *LS* method of the same A_{i+2} coefficients calculations. Thus, we shown that it is possible to move from the *LS* formulation to *MS* just by replacing $\sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{A_{i+2}}{s+b_i}$ term by $\sum_{i=1}^{n_{Lags}} \frac{C_{i+2} * ML_{i+2}}{s+b_i}$ and this will allow us to avoid the use of the *MS* algorithm and use the *LS* algorithm to get the Minimum State formulation.

Results

By use of the approximation of the aerodynamic forces in the *pk* flutter method, we obtained several flutter results. For this business aircraft, 4 flutter values were predicted. Figures 1 and 2 represent, in the form of 3D bars, the differences in flutter speed values (in knots) calculated with various approximation methods such as Least Square *LS* (with 8 lag terms) and our new Mixed States *MxState* method (with 1, 2, 3 and 4 lag terms) implemented in the *pk* flutter method with respect to the flutter speeds calculated with the standard *pk* flutter program. We have called these differences ‘flutter speed error results’. Figures 3 and 4 show, again using 3D bars, the differences in flutter frequency values (Hz) calculated with various approximation methods such as Least Square *LS*

(with 8 lag terms) and our new Mixed States *MxState* method (with 1,2,3 and 4 lag terms) with respect to the flutter frequencies (Hz) calculated by the *pk* flutter standard program.

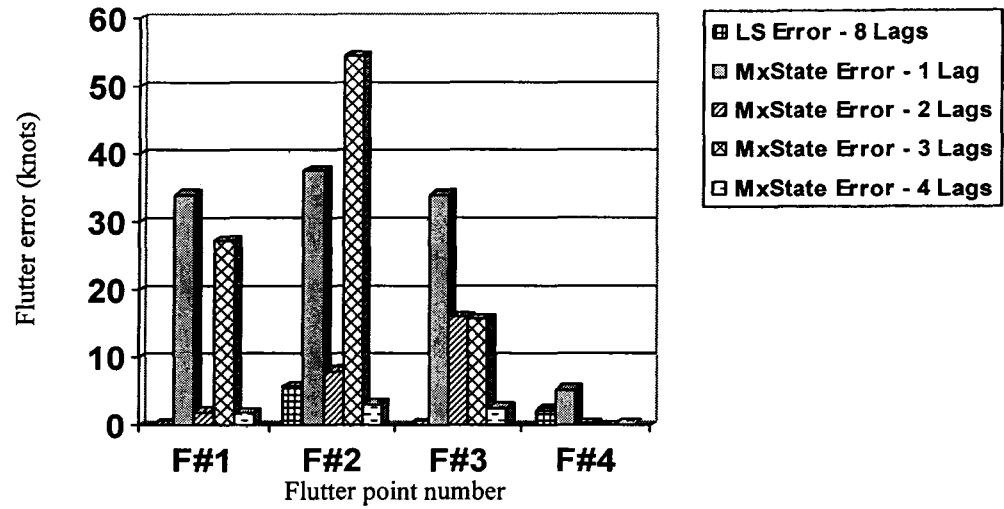


Figure 1 Flutter speed error results (knots) calculated by the LS method with 8 lags and by the *MxState* method with 1-4 lags for 44 symmetric modes

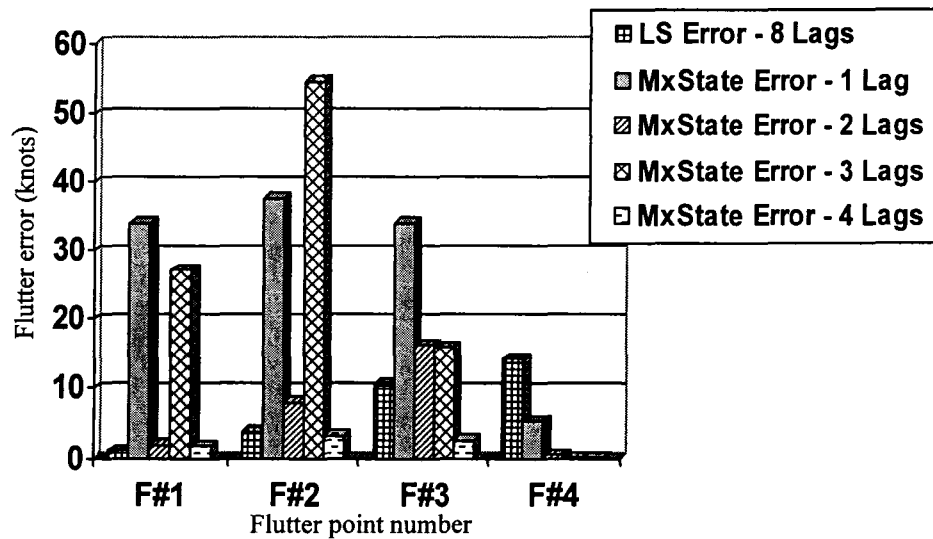


Figure 2 Flutter speed error results (knots) calculated by the LS method with 8 lags and by the *MxState* method with 1 - 4 lags for 50 anti-symmetric modes

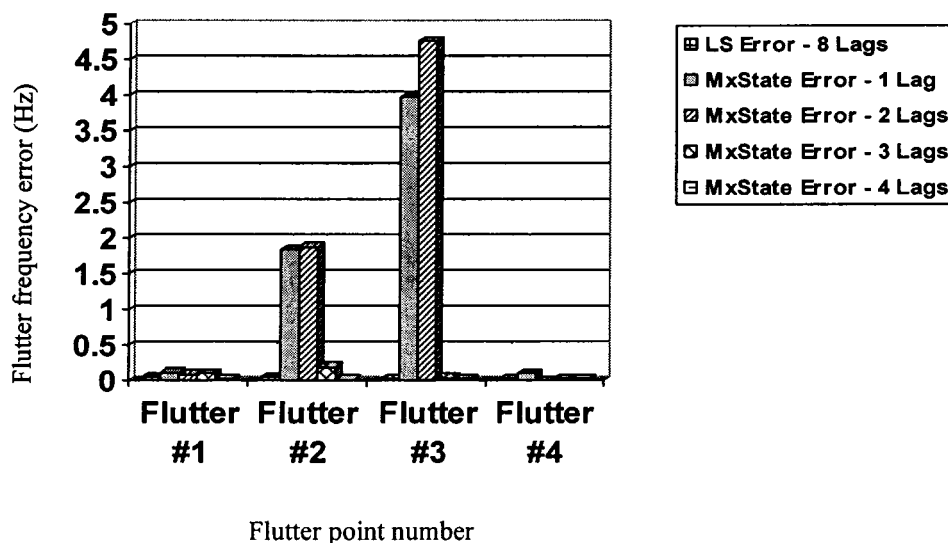


Figure 3 Flutter frequency error results (Hz) calculated by the *LS* method with 8 lags and by the *MxState* method with 1-4 lags for 44 symmetric modes of a business aircraft

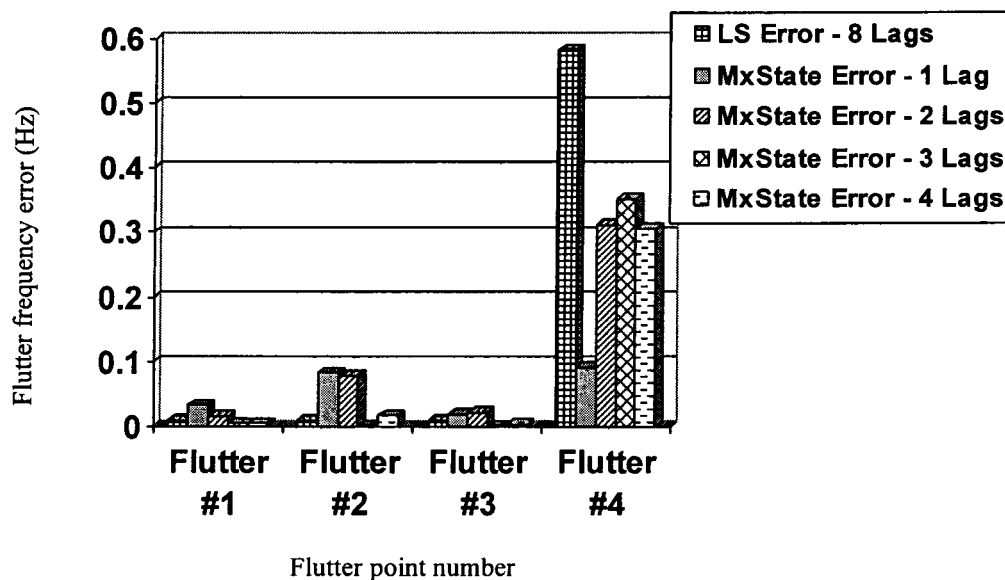


Figure 4 Flutter frequency error results (Hz) calculated by the *LS* method with 8 lags and by the *MxState* method with 1-4 lags for 50 anti-symmetric modes of a business aircraft

Conclusions

This new mixed (*LS* and *MS*) formulation called the *MxState* method will allow us to obtain the *MS* approximation without passing through a long iterative algorithm. In this manner, we minimize the number of lag terms in the *MS* approximation term, which means that the lags applied to the two terms: $\sum_{i=1}^{n_{lag}} \frac{A_{i+2}}{s + b_i} s$ and $D[sI - R]^{-1} E s$ will be the same. We compared the flutter speeds and frequencies found by the flutter standard nonlinear method with the flutter speeds and frequencies found by the *LS* approximation method with 8 lag terms, and with the flutter speeds and frequencies found by the new mixed state *MxState* with 1 to 4 lag terms for the CL-604 aircraft.

We found that the *MxState* method with 4 lags gives results that are very close to the results of the standard *pk* flutter and the *LS* approximation method with 8 lags. We noticed that the best error values error for both cases (Symmetric and Anti-Symmetric modes) are those of the *MxState* with 4 lags. These results were obtained on a business aircraft with 44 symmetric modes and 50 anti-symmetric modes.

Acknowledgements

We would like to thank to Bombardier Aerospace for the grant obtained on the contract called *Aerodynamic forces approximations in time domain* and also to the NSERC (National Sciences and Engineering research Council of Canada) for additional grant provided to us on the same contract with Bombardier Aerospace.

References

- [1] Tiffany, S.H., Adams, W.M., "Nonlinear programming extensions to rational function approximation of unsteady aerodynamics", NASA TP-2776, July 1988.
- [2] Roger, K.L., "Airplane math modeling methods for active control design", AGARD-CP-228 - Structural Aspects of Active Controls, 1977, pp. 4.1 - 4.11.
- [3] Karpel, M., "Design for flutter suppression and gust alleviation using state space modeling", Journal of Aircraft, Vol. 19(3), 1982, pp. 221-227.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Edwards, J.W., 1977, *Unsteady aerodynamic modeling and active aeroelastic control*, Ph.D Dissertation, Stanford University.
- [2] Roger, K.L., 1977, Airplane math modeling methods for active control design, AGARD-CP-228.
- [3] Karpel, M., 1990, Design for active flutter suppression and gust alleviation using state space aeroelastic modeling, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13(1), pp. 30-37.
- [4] Buttrill, E., Bacon, B., Heeg, J., Houck, J. and Wood, D., 1992, *Simulation and model reduction for the AFW program*, AIAA Paper CP-92-2081, AIAA Dynamics Specialists Conference, Dallas, Texas, USA.
- [5] Mukhopadhyay, V., 1995, Flutter suppression control law design and testing for the active flexible wing, Journal of Aircraft, Vol. 32(1), pp. 45-51.
- [6] Tiffany, S.H. and Adams, W.M., 1988, Nonlinear programming extensions to rational function approximation of unsteady aerodynamics, NASA TP-2776.
- [7] Tiffany, S.H., Adams, W.M. Jr., 1984, Fitting aerodynamic forces in the Laplace domain : an application of a nonlinear non-gradient technique to multilevel constrained optimization, NASA TM 86317.
- [8] Dunn, H.J., 1980, An analytical technique for approximating unsteady aerodynamics in the time domain, NASA TP-1738.
- [9] Poirion, F., 1995, Modélisation temporelle des systèmes aéroserveoélastiques. Application à l'étude des effets des retards, La Recherche Aérospatiale, Vol. 2, pp. 103-114.
- [10] Zimmermann, H., 1991. *Aeroservoelasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 90(1-3), pp 719-735
- [11] Hoadley, S. T., Karpel, M., 1991, *Application of aeroservoelastic modeling using minimum-state unsteady aerodynamic approximations*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 14(6), pp. 1267-1276.
- [12] Stearman, R.O., Powers, E.J., Schwartz, J., Yurkovich, R., 1991, *Aeroelastic system identification of advanced technology aircraft through higher order signal processing*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC, Vol. 2, pp. 1607-1616.
- [13] Suzuki, S., Yonezawa, S., 1993, Simultaneous structure/control design optimization of a wing structure with a gust load alleviation system, Journal of Aircraft, Vol. 30(2), pp. 268-274.
- [14] Adams, W. M. Jr., Hoadley, S. T., 1993, *ISAC : A tool for aeroservoelastic modeling and analysis*, Collection of Technical Papers - AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Vol. 2, pp. 1010-1018.

- [15] Tewari, A., Brink-Spalink, J., 1993, *Multiple pole rational-function approximations for unsteady aerodynamics*, Journal of Aircraft, Vol. 30(3), pp. 426-428.
- [16] Livne, E., 1993, Alternative approximations for integrated control/structure aeroservoelastic synthesis, AIAA Journal, Vol. 31(6), pp. 1100-1108.
- [17] Fritchman, B.M., Hammond, R.A., 1993, *New method for modeling large flexible structures*, Simulation, Vol. 61(1), pp. 53-58.
- [18] Luton, J. A., Mook, D. T., 1993, *Numerical simulations of flutter and its suppression by active control*, AIAA Journal, Vol. 31(12), pp. 2312-2319.
- [19] Herszberg, I., Karpel, M., 1996, *Flutter sensitivity analysis using residualization for actively controlled flight vehicles*, Structural Optimization, Vol. 12(4), pp. 229-236.
- [20] Chen, P.C., Sulaeman, E., 2003, Nonlinear response of aeroservoelastic systems using discrete state-space approach, AIAA Journal, Vol. 41(9), pp. 1658-1666.
- [21] Botez, R.M., Bigras, P., 1999, *Aerodynamic approximation of the unsteady forces for the aeroservoelasticity study*, 46th CASI Canadian Aeronautics and Space Institute Annual Conference, Montréal, Canada, 2-5 May, pp. 155-161.
- [22] Cotoi, I., Botez, R.M., 2002, *Method of unsteady aerodynamic forces approximation for aeroservoelastic interactions*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 25(5), pp. 985-987.
- [23] Luus, R., 2000, *Iterative dynamic programming*, Ed. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton London New York, USA, pp. 44-54.
- [24] Botez, R.M., Cotoi, I., Dinu, A.D., 2002, *The Luus-Jakola model reduction procedure applied to aeroservoelastic systems*, 27th Annual Congress of the American-Romanian Academy ARA of Arts and Science, Oradea, Roumanie.
- [25] Cotoi, I., Dinu, A. D., Botez, R.M., 2004, *Model order reduction for aeroservoelasticity studies by use of LRSRM and LRSM algorithms*, The 24th International Congress of Aeronautical Sciences ICAS 2004, Yokohama, Japan, 30/08-03/09/2004.
- [26] Hiliuta, A., Botez, R.M., Brenner, M., 2005, *Approximation of unsteady aerodynamic forces by use of fuzzy techniques*, 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Austin, Texas, 18-21 april.
- [27] Biskri, D.E., Botez, R. M., Therien, S., Rathé, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2005, *New mixed method for unsteady aerodynamic forces approximations for aeroservoelasticity studies*, IFASD 2005 – Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2005, Munich, Germany, June 28 - July 1.
- [28] Botez, R.M., Biskri, D.E., Terrien, S., Rathe, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2005, *Method based on the LS approach used for flutter aeroservoelasticity analysis studies*, IASTED MSO Conference, Oranjenstad, Aruba, August 29-31.
- [29] Biskri, D.E., Botez, R.M., Therien, S., Rathe, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2005, *Mixed method for unsteady aerodynamic forces approximations for aeroservoelasticity studies on fly-by-wire aircraft*, Canadian Aeronautical Society Institute CASI Conference, Toronto, Ont., Canada, 26-27 April.

- [30] Biskri, D.E., Botez, R.M., Therien, S., Rathe, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2005, *Corrected Least Squares Method for AeroServoElasticity Studies*, Le 20^e Congrès Canadien de Mécanique Appliquée à l'Université McGill, Montréal, 30 mai – 2 juin.
- [31] Botez, R.M., Ibrir, S., Biskri, D., Hamza, D., 2003, *Aerodynamic forces approximation for aeroservoelastic models*, The 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Paper AIAA-2003-7446, Norfolk, VA, United States, 7-11 April.
- [32] Botez, R.M., Biskri, D., Cotoi, I., Hamza, D., Herda, M., 2003, *Unsteady aerodynamic forces methods for aeroservoelasticity studies*, International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD 2003, Amsterdam, Holland, 4-6 June.
- [33] Botez, R., Cotoi, I.*, Doin, A.*, Biskri, D.*, 2002, *Method validation for aeroservoelastic analysis*, The 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Paper AIAA 2002-1428, Denver, CO, United States, 23 - 35 April.
- [34] Botez, R., Cotoi, I.*, Doin, A.*, Biskri, D.*, 2002, *Method for flutter aeroservoelastic open loop analysis*, The 5th ASME Symposium on Fluid-Structure Interactions, Aeroelasticity, Flow Induced Vibrations and Noise, New Orleans, Louisiana, 17 - 22 November.
- [35] Biskri, D.E., Botez, R.M., Stathopoulos, N., Thérien, S., Rathé, A., Dickinson, M., 2005, *New mixed method for unsteady aerodynamic force approximations for aeroservoelasticity studies*, Paper C210816, under press, AIAA Journal of Aircraft.
- [36] Botez, R. M., Biskri, D.E., 2006, *Unsteady aerodynamic forces mixed method for aeroservoelasticity studies on an F/A-18 aircraft*, under revision,. Paper J27921, AIAA Journal of Aircraft.
- [37] Biskri, D.E., Botez, R.M., 2006, *Aerodynamic forces based on an error analytical formulation for aeroservoelasticity studies on an F/A-18 aircraft*, accepted for publication in the Journal of Aerospace Engineering.
- [38] Biskri, D.E., Botez, R.M., Thérien, S., Rathé, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., 2006, *Aeroservoelasticity analysis method based on an error analytical form*, Paper J27632, under revision in the AIAA Journal of Aircraft.
- [39] Botez, R. M., Biskri, Doin, A., D.E., Cotoi, I., Parvu, P., 2004, *Closed loop aeroservoelastic analysis method*, AIAA Journal of Aircraft, Vol. 41(4), pp. 962-964.
- [40] Botez, R., M., Doin, A., Biskri, D., Cotoi, I., Hamza, D., Parvu, P., 2003, *Method for flutter aeroservoelastic open loop analysis*, Canadian Aeronautical Society Journal, Vol. 49(4), pp. 179-190.